NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Eksamensdato: 11. desember 2018

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Vektingen av hver oppgave er angitt i oppgaven. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser (obs. gjelder ikke Oppgave 1). Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 10

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 *(20p)*

Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Marker på eget svarspapir med ‹‹Sann›› / ‹‹Usann›› / ‹‹Kan ikke avgjøres››. Begrunnelse trenges ikke.

(i) cos er en like (jevn) funksjon.
Sann: $\cos(-x) = \cos(x)$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$.
Sann, ifølge standardgrenseverdier (alternativt ved L'hôpital).

(iii) Funksjonen $x \mapsto x^3$ er overalt strengt voksende.
Sann: $x^3 > y^3$ for alle $x > y$ selv om $(x^3)' = 3x^2$ forsvinner i $x = 0$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.
Usann: Riemannsummen er tatt over $(0, \pi)$.

(v) En gitt kontinuerlig funksjon med $f(0) = 0$ er deriverbar i origo.
Kan ikke avgjøres: $f(x) = x$ er deriverbar i origo, $f(x) = |x|$ er det ikke; begge er kontinuerlige.

(vi) Differensiallikningen $y' + x^2 y = 0$ er separabel.
Sann: $\frac{y'}{y} = -x^2$.

(vii) $\ln(1 + x) = x - \mathcal{O}(x^2)$ for x nært 0.
Sann: ln er glatt på $(0, \infty)$, og $\frac{d}{dx} \ln(1+x)|_{x=0} = \frac{1}{1+x}|_{x=0} = 1$. Utsagnet følger da av Taylor's setning.

(viii) Enhver begrenset funksjon har et globalt maksimum.
Usann: $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\arctan(x)| = \frac{\pi}{2}$, men verdien $\frac{\pi}{2}$ tas aldri av funksjonen.

(ix) Dersom $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ eksisterer er f deriverbar i x_0.
Sann: dette er definisjonen av deriverbarhet.

(x) Enhver kontinuerlig deriverbar (C^1) funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er også uniformt kontinuerlig.
Usann: $x \mapsto x^2$ er glatt, men ikke uniformt kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

Oppgave 2 *(10p)*

Integrer følgende uttrykk.

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| - \ln|x| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.\end{aligned}$$

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad\left(\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$

Ettersom cosh er like og sin odde, er integralet over $(-\pi, \pi)$ null.

Alternativt: delvis integrasjon gir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\sin(x)\sinh(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{0} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sinh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\underbrace{\cos(x)\cosh(x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{0} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

grunnet periodisitet til sin og cos. Så

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\arctan(x)\Big|_{x=-R}^{x=R}\right)\\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Oppgave 3 *(10p)*

Funksjonen $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

kan skrives på formen $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(i) Bestem koeffisientene a_k, for alle $k = 0, 1, 2, \ldots$

Vi vet at

$$\mathrm{e}^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Derfor er

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k - (-x)^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\end{aligned}$$

og vi har at

$$a_k = 0 \text{ for like } k, \qquad a_k = \frac{1}{k!} \text{ for odde } k.$$

Et alternativ er å beregne de deriverte i $x = 0$ direkte, enten ved hjelp av sinh og cosh, eller ved formelen $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, der man ser at

$$\sinh = \sinh'' = \sinh^{(4)} \dots$$

med $\sinh(0) = 0$, og

$$\sinh' = \sinh''' = \sinh^{(5)} \dots$$

med $\sinh'(0) = 1$. Ettersom det er gitt at sinh kan skrives på formen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ følger det av Taylor's setning at alle a_k er bestemt av de deriverte i $x = 0$.

(ii) Beregn grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sinh(x)}{x^3}.$$

Vi har

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$

og

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$

så

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x) - \sinh(x)}{x^3} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - \left(x + \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)}{x^3} \\ &= -\frac{1}{3} + O(x^2) \\ &\to -\frac{1}{3},\end{aligned}$$

når $x \to 0$.

Alternativt kan man bruke L'hôpital's regel, som i hvert skritt gir koeffesienter i Taylorutviklingen i teller og nevner ovenfor.

Oppgave 4 *(10p)*

For følgende funksjoner, avgjør hvorvidt de er (1) surjektive, (2) injektive, (3) inverterbare på de mengdene som er angitt i oppgaven.

(i) $x \mapsto x + x^3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(x + x^3\right) = \pm\infty,$$

og polynom er kontinuerlige. Skjæringssetningen gir at $x + x^3$ antar alle verdier mellom vilkårligt store positive og negative tall, det vil si, funksjonen gitt ved $f(x) = x + x^3$ er surjektiv på $\mathbb{R}$.

Ettersom

$$(x + x^3)' = 1 + x^2 \geq 1,$$

er f injektiv (følger av middelverdisetningen).

En funksjon som er injektiv og surjektiv er bijektiv, det vil si inverterbar, så f er inverterbar $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) $x \mapsto \cos(x) \colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (0, 1]$

$$\cos(0) = 1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0,$$

så ifølge skjæringssetningen tar cos alle verdier i $(0, 1]$. Funksjonen er derfor surjektiv.

Den er imidlertid ikke injektiv, da

$$\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

og derfor heller ikke bijektiv (inverterbar).

Oppgave 5 *(10p)*

(i) Finn alle kritiske punkter til funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x(1+x^2)}{1+x^2} - 2x(\ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1-\ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2} = 0$$

nøyaktig dersom $x = 0$ eller

$$\ln(1+x^2) = 1 \iff 1 + x^2 = e \iff x = \pm\sqrt{e-1}.$$

Kritiske punkter er $0, \pm\sqrt{e-1}$.

(ii) Lokalisér eventuelle globale maksima og minima til f og avgjør hvor funksjonen er voksende/avtagende. Bestem eventuelle asymptoter når $x \to \pm\infty$.

Funksjonen f er like, så betrakt $x > 0$ ($x = 0$ er et kritisk punkt). Vi ser da fra deloppgave (i) at

$$f'(x) \gtreqless 0 \iff 1 \gtreqless \ln(1+x^2) \iff \sqrt{e-1} \gtreqless x.$$

Funksjonen f er derfor voksende på $[0, \sqrt{e-1}]$, avtagende på $[\sqrt{e-1}, \infty)$, og omvendt for $x \leq 0$ ettersom den er like.

Fra $\lim_{w\to\infty} \frac{\ln(w)}{w} = 0$ følger

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} = 0,$$

og $y = 0$ er en asymptote for $f(x)$ når $x \to \pm\infty$.

Ettersom $f(x) \geq 0$ med $f(0) = 0$ er

$$x = 0$$

posisjonen for et globalt minimum. Vidare er $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, og f er kontinuerlig, slik at

$$x = \pm\sqrt{e-1},$$

er eneste mulige posisjon for et globalt maksimum. At dette er et strikt globalt maksimum kan avleses fra tegnstudiet av den deriverte.

Oppgave 6 *(10p)*

Forenkle

$$\sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

For hvilke verdier av x konverger $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$?

Summen er geometrisk:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad x \neq 1,$$

og

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = n + 1, \qquad x = 1.$$

- For $|x| < 1$ konvergerer $x^{n+1} \to 0$ når $n \to \infty$, og $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- For $x = 1$ er rekken åpenbart divergent, og for $x = -1$ er likeså

  $$\frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \begin{cases} 1, & n \text{ like}, \\ 0, & n \text{ odde}, \end{cases}$$

  divergent.
- For $|x| > 1$ er $\lim_{m\to\infty} x^{n+1} = \infty$ for odde n, slik at rekken er divergent også i dette tilfelle.

Oppgave 7 *(10p)*

Funksjonen $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ er glatt (C^∞) og derfor kontinuerlig. Vis at den også er uniformt kontinuerlig.

Ifølge middelverdisetningen eksisterer $\xi \in \mathbb{R}$, slik at

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |x - y||\cos(\xi)| \leq |x - y|,$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$. Det følger umiddelbart at sin er uniformt kontinuerlig (velg $\delta = \varepsilon$, som er uavhengig av x og y).

Oppgave 8 *(10p)*

Betrakt, for $x \geq 0$, initialverdiproblemet

$$y'(x) - 6x\,y(x) = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{$*$}$$

(i) Løsningen $x \mapsto y(x)$ til $(*)$ har en invers $y \mapsto x(y)$, $y \geq 1$. Formulér initialverdiproblemet tilsvarende $(*)$, men for den inverse funksjonen $x = x(y)$.

For en deriverbar funksjon $y\colon x \mapsto y(x)$ og dens invers $y^{-1}\colon y \mapsto x(y)$ gjelder

$$(y^{-1})'(y(x)) = \frac{1}{y'(x)},$$

det vil si, $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$. Da er $(*)$ det samme som

$$\frac{1}{x'(y)} - 6x(y)\,y = 0, \qquad x(1) = 0. \tag{$**$}$$

(Med Leibniz' notasjon kan dette også sees direkte fra $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.)

(ii) Bestem løsningen y og dens invers.

For $y \neq 0$, og unntatt initialvilkåret $y(0) = 1$, er $(*)$ ekvivalent med

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} &= 6x \\
\iff \quad (\ln|y(x)|)' &= 6x \\
\iff \quad \ln|y(x)| &= 3x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}, \\
\iff \quad |y(x)| &= \mathrm{e}^{3x^2+C} \\
\iff \quad y(x) &= \tilde{C}\mathrm{e}^{3x^2}, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Gitt $y(0) = 1$, har vi altså

$$y(x) = \mathrm{e}^{3x^2},$$

som er det samme som at

$$3x^2 = \ln(y) \quad \iff \quad x = \sqrt{\frac{\ln(y)}{3}},$$

da det er angitt i oppgaven at $x \geq 0$.

Alternativt kan man løse $(**)$ for $x(y)$ og deretter finne $y(x)$, eller løse begge likningene $(*)$ og $(**)$ direkte.

Oppgave 9 *(10p)*

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon med

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq B,$$

for et endelig tall B. Vis ved et ε/δ-argument at funksjonen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

er kontinuerlig i hvert punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Et bevis uten ε/δ gir maksimalt halv uttelling.

La $\varepsilon > 0$. Dersom $B = 0$ er $f \equiv 0$, og $F \equiv 0$ er trivielt kontinuerlig; velg hvilken som helst $\delta > 0$. Dersom $B > 0$ gjelder i stedet

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_0^x f(s)\,ds - \int_0^{x_0} f(s)\,ds \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x f(s)\,ds \right| \\
&\leq \int_{x_0}^x |f(s)|\,ds \\
&\leq \int_{x_0}^x \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)|\,ds \\
&= \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)|\,|x - x_0| \\
&\leq B|x - x_0|,
\end{aligned}$$

som er mindre enn ε dersom $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{B}$. Velg altså

$$\delta < \frac{\varepsilon}{B}.$$

I regningen ovenfor har vi brukt (i) linearitet til integralet, (ii) trekantulikheten for integraler, (iii) definisjonen av supremum, (iv) antakelsen på f, og (v), igjen linearitet til integralet.

Obs. at det er gitt i oppgaven at F er en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, det vil si, at f er integrerbar.