

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101 Grunnkurs i analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Kari Hag

Tlf: 48 30 19 88

Eksamensdato: 15. oktober 2018

Eksamenstid (fra–til): 17:30–19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:

Vektingen av hver oppgave er angitt i oppgaven. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser (obs. gjelder ikke Oppgave 1). Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ **2-sidig** ☒

sort/hvit ☒ **farger** ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Marker på svarspapir med $\langle\langle$ Sann $\rangle\rangle/\langle\langle$ Usann $\rangle\rangle/\langle\langle$ Kan ikke avgjøres $\rangle\rangle$. Begrunnelse trenges ikke.

(20p)

- a) Funksjonen $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ gitt ved $x \mapsto e^x$ er bijektiv (inverterbar).

Sann. Vi har $(e^x)' = e^x > 0$, så $x \mapsto e^x$ er injektiv, og derfor inverterbar på sitt bilde. Ettersom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

og funksjonen er overalt voksende, er bildet $(0, \infty)$, og det er sant at $x \mapsto e^x$ er bijektiv $\mathbb{R} \mapsto (0, \infty)$.

- b) Rekken $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerer.

Sann. En rekke $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverger hvis og bare hvis $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergerer for ethvert gitt indeks k_0 . Ettersom vi vet at den harmoniske rekken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverger, diverger altså også $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k}$.

- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{x+2x^3} = \frac{2}{3}$.

Usann.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+x} \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2},$$

og grenseverdier er entydige.

- d) En gitt deriverbar funksjon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med $f'(x_0) = 0$ har et ekstremalpunkt i x_0 .

Kan ikke avgjøres. Funksjonene $x \mapsto x^n$, for heltall $n \geq 2$, oppfyller vilkåren, men bare de med $n = 2k$ har et ekstremalpunkt i $x = 0$.

- e) $\ln(a^b) - \ln(a) = (b-1)\ln(a)$ for alle $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Sann.

$$\ln(a^b) - \ln(a) = b \ln(a) - \ln(a) = (b-1) \ln(a),$$

for alle $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x} = 2.$

Usann. Grenser er entydige, og

$$\frac{\sin(x/2)}{x} = \frac{1}{2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(y)}{y} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{når } y \rightarrow 0,$$

og $y = \frac{x}{2} \rightarrow 0$ da $x \rightarrow 0$.

g) $\inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0.$

Sann. Vi har

$$0 < \frac{1}{n}, \quad \text{for hvert } n \in \mathbb{N},$$

så 0 er en nedre skranke for mengden $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. La $m > 0$, $m \in \mathbb{R}$, være en strengt større nedre skranke. Det finnes et heltall n_0 slik at

$$0 < \frac{1}{n_0} < m,$$

og m er da ikke en nedre skranke for $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Altså er 0 den største nedre skranken (infimum).

h) $|x| \leq |x - y| + |y|$ for alle reelle tall x, y .

Sann. Vi har

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ifølge trekantulikheten.

i) La $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (to ganger kontinuerlig deriverbar) med $f'(0) = 0$ og $f''(0) > 0$. Da har f et lokalt maksimum i origo.

Usann. Hver funksjon $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ med $f'(0) = 0$ og $f''(0) > 0$ har ifølge andrederivertetesten et strengt lokalt maksimum i $x = 0$, hvilket motsier at origo er et maksimum (strengt eller ikke-strengt). Dette er en konsekvens av Taylor's setning, som gir

$$f(x) - f(0) = f'(0)x + f''(\xi) \frac{x^2}{2} = f''(\xi) \frac{x^2}{2}, \quad 0 < |\xi| < |x|. \quad (1)$$

La nå $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}f''(0)$. Ettersom f'' er kontinuert, finnes $\delta > 0$, slik at

$$|f''(\xi) - f''(0)| < \varepsilon, \quad \text{når} \quad |x - 0| < \delta.$$

Derfor er

$$f''(\xi) = \underbrace{f''(\xi) - f''(0)}_{|\cdot| < \varepsilon} + f''(0) > \frac{1}{2}f''(0) > 0,$$

for slike x . Altså er tegnet på $f(x) - f(0)$ i (1) bestemt av $f''(\xi)\frac{x^2}{2}$ som er strengt positivt for alle $0 < |x| < \delta$, og origo er et strengt lokalt minimum.

- j) La $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være deriverbar med $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Da oppfylder den deriverte f' skjæringsetningen selv om f' ikke er kontinuert: f' antar alle verdier mellom $f'(a)$ og $f'(b)$.

Sann. Dette er Darboux's setning, se Øving 5. (Obs. at dette utsagn generelt ikke gjelder for funksjonen f selv, dersom f ikke er kontinuert.)

Oppgave 2 La

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 - x^2}.$$

- a) Vis at $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ eksisterer, og at f har en kontinuert utvidelse $\tilde{f}$ definert på $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(5p)

For alle $|x| \neq 1$ gjelder

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 - x^2} = \frac{x(x - 1)}{(1 - x)(1 + x)} = -\frac{x}{1 + x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{2},$$

så dersom vi lar

$$\tilde{f}(x) = -\frac{x}{1 + x}, \quad x \neq -1,$$

er $\tilde{f}: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuert i $x = 1$. For alle andre x , $|x| \neq 1$, er $\tilde{f}$ en rasjonal funksjon (som er kontinuert ettersom den er et produkt av veldefinerte kontinuerlige funksjoner). Altså er utvidelsen $\tilde{f}$ kontinuert på hele sin definisjonsmengde.

- b) Hva er verdimengden til $\tilde{f}$?

(5p)

Merk at

$$\tilde{f}(x) = -\frac{x}{x+1} = -\left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+x} - 1.$$

Så

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{y} - 1 = \pm\infty.$$

og $\tilde{f}$ er strengt avtakende med deriverte

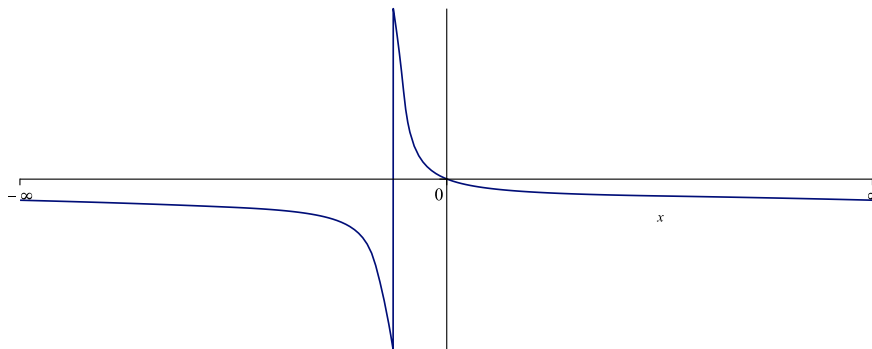
$$\tilde{f}'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0, \quad \text{for alle } x \neq -1,$$

og en vertikal tangent i $x = -1$.

Da $\tilde{f}$ er kontinuertlig (på sin definisjonsmengde) garanterer skjæringsetningen at den tar alle verdier mellom to verdier, og da den er monoton tar den ingen andre. Så

$$\tilde{f}((-\infty, -1)) = (-\infty, -1), \quad \tilde{f}((-1, \infty)) = (-1, \infty),$$

og verdimengden er $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



(Vi har til og med vist at $\tilde{f}$ er en bijeksjon på denne mengden.)

Oppgave 3 La $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en funksjon med egenskapen at

$$f'' = -f, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (2)$$

a) Bruk produktregelen til å vise at

$$(f(t))^2 + (f'(t))^2 = 1,$$

for alle $t \in \mathbb{R}$.

(5p)

En funksjon f med andre-deriverte er kontinuert og kontinuert deriverbar. Så vi kan derivere venstreleddet $g(t) = (f(t))^2 + (f'(t))^2$:

$$\frac{d}{dt}g(t) = 2f(t)f'(t) + 2f'(t)f''(t) = 2f'(t)(f(t) + f''(t)) = 0,$$

fra egenskapene til f , og finne at g er en konstant funksjon. Ettersom videre

$$g(0) = (f(0))^2 + (f'(0))^2 = 0 + 1 = 1,$$

er $g(t) = 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Dersom $x = f(t)$, $y = f'(t)$, hvilket geometrisk objekt samsvarer formelen for x og y med? Kan du identifisere funksjonene f og f' ?

(5p)

Med x og y slik ovenfor er

$$x^2 + y^2 = 1,$$

som er likningen for enhetssirkelen i planet. (Vi har ikke vist at $x = f(t)$ og $y = f'(t)$ kan ta alle verdier i intervallet $[-1, 1]$, men dette forventes ikke i oppgaven).

Vi identifiserer f og f' som sin og cos (opp til translasjoner), der vi ser fra $f(0) = 0$ og $f'(0) = 1$ at

$$f(t) = \sin(t), \quad f'(t) = \cos(t).$$

Alternativt kan man vise til at vi i forelesningen har gjennomgått at sin er den entydige løsningen til differensiallikningen (2).

Oppgave 4 Angi Taylorpolynomet av andre grad til

$$f(x) = \cos(x^2)$$

i $x_0 = \sqrt{\pi}$. Marker hva i Taylorpolynomet som kalles lineariseringen til f .

(5p)

Kjerne- og produktregelen gir de deriverte

$$\frac{d}{dx} \cos(x^2) = -2x \sin(x^2),$$

og

$$\frac{d^2}{(dx)^2} \cos(x^2) = -\frac{d}{dx} (2x \sin(x^2)) = -(2 \sin(x^2) + (2x)^2 \cos(x^2)).$$

Andre ordens Taylorpolynom i et punkt x_0 er generelt

$$P_2(h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0), \quad h = x - x_0.$$

I tilfellet $f(x) = \cos(x^2)$ og $x_0 = \sqrt{\pi}$ blir dette

$$\begin{aligned} P_2(h) &= \cos(\pi) - 2\sqrt{\pi} \sin(\pi)h - (2 \sin(\pi) + 4\pi \cos(\pi)) \frac{h^2}{2} \\ &= -1 + 2\pi h^2, \end{aligned}$$

ettersom $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$. Lineariseringen er -1 (leddet med h^2 er kvadratisk i $h = x - x_0$ som er en liten størrelse nært x_0 , og leddet med h forsvinner i dette tilfelle).

Man kan selvsagt svare med

$$P_2(x) = -1 + 2\pi(x - x_0)^2$$

i en eller annen form som et polynom i x , men det er viktig å forstå at Taylorpolynom er approksimasjoner nært et punkt, slik at den lineære termen er den som er lineær i $h = x - x_0$, ikke nødvendigvis lineær i x (mer enn om vi utvikler kring $x_0 = 0$).

Oppgave 5 Formuler middelverdisetningen (sekantsetningen).

(5p)

Middelverdisetningen: La f være en kontinuerlig funksjon definert på et lukket og endelig intervall $[a, b]$, slik at f er deriverbar på det åpne intervallet (a, b) . Da eksisterer et tall $c \in (a, b)$, slik at

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$