Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse I
Høst 2018

Øving 13

Denne øvingen blir sensurert for den (eventuelle) gruppe som har 7 godkjente øvinger når øving 12 er sensurert. Løsningsforslag vil bli gitt, men ingen ekstra øvingstime.

1 Gi eksempel på:

a) en divergent følge med en strengt monoton, konvergent, delfølge;

b) en teleskopsum;

c) en ikke-konstant, ikke-lineær, affin funksjon;

d) en funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med asymptote $x+1$ når $x \to \infty$, og som oppfyller $f(x) = x^2 + O(x^3)$ når $x \to 0$;

e) en integrerbar, stykkevis kontinuerlig, funksjon $[-1,1] \to \mathbb{R}$ som ikke er overalt kontinuerlig;

f) en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f'(0) = 0$ som likevel er bijektiv (og derfor inverterbar);

2 **a)** Finn Taylorutviklingen til

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

omkring punktet $x_0 = 1$, med restledd $O(x^3)$. Markér hva som kalles Taylorpolynomet $P_2(h;1)$, $h = x - 1$.

b) Skriv ned Taylorutviklingen av samme orden, men i punktet $t_0 = 0$, til

$$g(t) = \frac{1}{1+t}.$$

c) Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ fra oppgave (a) er veldefinert i alle punkter omkring origo (men ikke i origo selv). Hva er grunnen til den likevel ikke kan Taylorutvikles kring origo?

3 Finn $\sup f$ og $\inf f$ til følgende funksjoner. Dersom (globale) maksimum eller minimum eksisterer, angi i hvilke punkter disse ekstremalverdiene realiseres. Angi kort de setninger/argumenter du bruker.

a)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x(x-1)^2,$$

b)

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x(x-1)^2,$$

c)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto |\sin(x)|(x-1)^2,$$

$\boxed{4}$ La $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge med egenskapen

$$|x_n - 3| < \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Vis, ved hjelp av definisjonen av grenseverdi, at

$$x_n^2 \to 9$$

når $n \to \infty$.

$\boxed{5}$ Finn følgende (bestemte og ubestemte) integraler

a)

$$\int \ln(x^2)\,dx$$

b)

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

c)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(2x)\,dx$$

d)

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(2x)\,dx$$

$\boxed{6}$ Finn Taylorutviklingen i origo, med restledd $O(x^3)$, til den glatte utvidelsen $\tilde{g}\colon(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ til

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}.$$

Du trenger ikke argumentere for at utvidelsen er glatt eller kontinuerlig, men må selvsagt velge den utvidelsen som gjør g kontinuerlig i origo.