Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse I
Høst 2018

Øving 2

Skriv tydelig og korrekt, i språk så vel som i matematisk notasjon. Skill antakelser fra konklusjoner. Skriv ut alle skritt, vær tydelig med hva som følger av hva, og hvilke argumenter eller setninger du bruker.

$\boxed{1}$ Hvilke av følgene nedenfor er begrenset oven-/underifra (angi en begrensning) og/eller voksende/avtakende (gi et argument)?

a) $(x_n)_{n\geq 1} = (n)_{n\geq 1}$.

b) (1,1,1,1,1,1,1,. . .)

c) (1,-1,1,-2,1,-3,1,. . .)

d) Følgen $(x_n)_n$ gitt ved

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1.$$

Hint: Følgen er konvergent med $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

$\boxed{2}$ Finn supremum, infimum og grenseverdi for følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gitt ved $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Bruk definisjonene til å vise dette stringent.

$\boxed{1.2:14,22,30}$ Avgjør om følgende grenseverdier eksisterer (et kort argument mot, eller regning som gir en verdi er tilstrekkelig).

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

$\boxed{1.5:12,19,18}$ Bevis at følgende grenser eksisterer og er riktige.

a) Ved hjelp av ϵ/δ-definisjonen: $\lim_{x\to 2}(5 - 2x) = 1$.

b) Ved hjelp av ϵ/δ-definisjonen: $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$.

c) Ved hjelp av ϵ/N-definisjonen for følger: $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{5}$ Avgjør hvilke av følgende uttrykk som definerer kontinuerlige funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

Én av de to siste oppgavene er valgfri å levere inn (det vil ikke telle negativt dersom man prøver seg på begge).

$\boxed{\text{1.2:78}}$ Bestem (den naturlige) definisjonsmengden til funksjonen

$$f\colon x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vis at $\lim_{x\to 0} f(x)$ eksisterer, og at det finnes en kontinuerlig funksjon $\tilde{f}$ som er lik f i alle punkter utenom $x = 0$. Funksjonen $\tilde{f}$ sies i denne sammenheng være en *kontinuerlig utvidelse* av f.

$\boxed{\text{1.5:31}}$ Vis at grensebegrepet er entydig: dersom det finnes to grenseverdier a og b til samme reelle følge $(x_n)_n$, bevis $a = b$.

(Boken bruker grensebegrepet for funksjoner i denne oppgaven, men du kan selv velge om du vil bevise dette for funksjonsgrenser eller for følger.)