Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse I
Høst 2018

Øving 5

Dette er femte øving. Observer minimumskravet 8/12 øvinger godkjente for å gå opp til eksamen. Sjekk status i Blackboard.

2.6.11 Finn $\frac{d^3y}{(dx)^3}(x)$ for $y(x) = \cos(x^2)$.

2.7.11 Volumet til en kule med radius $r \geq 0$ er

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3.$$

Bruk lineær approksimasjon til å approksimere økningen av volumet V (i prosent) dersom radiusen r øker med 2%.

2.8.5 Vis at

$$\tan(x) > x \quad \text{når} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Obs. ikke geometrisk/grafisk, men analytisk!

2.7.21 Volumet V i en vanntank kan beskrives ved hjelp av formelen

$$V(t) = 350(20-t)^2, \qquad t \geq 0.$$

Den relevante fysiske enheten er liter, og vi teller $t = 0$ som starttid. Tiden t måles i minutter.

a) Hvor mye vann renner ut per minutt etter 5 minutter; etter 15 minutter?

b) Hvor mye vann renner ut per minutt i gjennomsnitt i tidsintervallet 5-15 minutter?

5 Finn en kontinuerlig deriverbar reell funksjon f med $f(0) = f'(0) = 0$, som likevel er strengt voksende, det vil si,

$$f(y) > f(x) \quad \text{dersom} \quad y > x.$$

Dette viser at streng monotoni ikke er det samme som strengt tegn på den deriverte; det siste er sterkere.

$\boxed{\text{2.8.29}}$ Finn og bevis Darboux's teorem.

Hvorfor er dette (muligens) overraskende etter det vi lært tidligere?

$\boxed{\text{2.9.10}}$ Bruk (formell) implisitt derivasjon til å finne tangenten til kurven (x, y) når

$$x^2y^3 - x^3y^2 = 12, \qquad (x, y) = (-1, 2).$$

$\boxed{8}$ La $z = \tan(x)$.

a) Vis at $1 + z^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

b) Gitt at $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{dx/dz}$ når begge kvotienter er endelige, vis at

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Du har nettopp beregnet den deriverte til funksjonen arctan.

$\boxed{\text{2.10.19}}$ Bestem $\int \sqrt{2x + 3}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{\text{4.3.3,14,34}}$ Beregn

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, for $a, b > 0$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$.

c) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$, gitt at f er to ganger deriverbar.

$\boxed{\text{4.4.21}}$ Finn og klassifiser alle ekstremalverdier og kritiske punkter til

$$f(x) = x^3(x - 1)^2.$$

Skisser grafen til f.