Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101 Grunnkurs i analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Eksamensdato: 4. desember 2019

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Vektingen av hver oppgave er angitt i oppgaven. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser (obs. gjelder ikke Oppgave 1). Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 *(20p)*

Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med ‹‹Sann›› eller ‹‹Usann››. *Begrunnelse trenges ikke på denne oppgaven.*

(i) Funksjonen $x \mapsto |x|$ er kontinuerlig.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x\left(x\ln(x)+\frac{2}{x^2}\right)} = 3.$

(iii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

(iv) $\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f$ kalles en øvre Darbouxsum for f på $[x_0, x_n]$.

(v) Likningen $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, løses av $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(vi) Funksjonen $f\colon x \mapsto \sqrt{x^2}$ har en invers $f^{-1}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

(vii) $\cos(x^2) = 1 + \mathcal{O}(x^4)$ hvor $|\mathcal{O}(x^4)| \le Cx^4$ for x nær 0.

(viii) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \le \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(ix) Det finnes funksjoner som er deriverbare, men ikke kontinuerlig deriverbare.

(x) $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}_{n\ge 1}$ er en voksende og begrenset følge, men som ikke konvergerer.

Oppgave 2 *(10p)*

Beregn

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\cosh(x)\mathrm{d}x, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)}$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$

Hint: Finn en sammenlikningsbar funksjon.

Oppgave 3 *(10p)*

Skisser grafen $y = f(x)$ til

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}.$$

Bestem definisjonsmengde og verdimengde, nullpunkter, lokale og globale ekstrema, og eventuelle asymptoter til f.

Oppgave 4 *(10p)*

Finn

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x-1)^3} \mathrm{d}x.$$

Oppgave 5 *(10p)*

La

$$x^2 + (y+1)^2 = 1,$$

der vi betrakter $y = y(x)$ som en funksjon av x nær punktet $(x, y) = (0, 0)$.

(i) Vis at

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Hint: Bruk gjerne implisitt derivasjon.

(ii) Bestem Taylorpolynomet (uten restledd) av andre grad til $y = y(x)$ i $x = 0$. Marker hva i Taylorpolynomet som kalles lineariseringen til f.

(iii) Hva er $y^{(37)}(0)$?

Oppgave 6 *(10p)*

La

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\sin(x))^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) For hvilke verdier av x konverger S_n når $n \to \infty$?

(ii) Beregn $\lim_{n\to\infty} S_n$ i disse tilfellene.

Oppgave 7 *(10p)*

(i) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{y'(x)}{2x} - y(x) = 1, \qquad y(1) = 2.$$

(ii) Vis at løsningen er uniformt kontinuerlig på $[1, 2]$, men ikke på $(1, \infty)$.

Oppgave 8 *(10p)*

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vis/gi et matematisk argument for at:

(i) f er kontinuerlig og deriverbar for $x \neq 0$.

(ii) f er kontinuerlig og deriverbar i $x = 0$.

(iii) f' ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

Man trenger ikke nødvendigvis å bruke ε/δ i denne oppgaven.