NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **MA1101 Grunnkurs i analyse**

Fagleg kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Eksamensdato: 4. desember 2019

Eksamenstid (frå–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: D: Ingen andre trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillaten (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annan informasjon:
Vektinga av kvar oppgåve er gjeven i sjølve oppgåva. Les igjennom alle oppgåvene før du byrjar; den opplevde vanskegraden er ikkje naudsynt i stigande rekkefølgje. Skriv tydeleg og eintydig, og grunngje berekningane/prova dine (obs. gjeld ikkje Oppgåve 1). Teikn gjerne. Spør dersom noko er uklårt.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1 *(20p)*

Kven av følgjande utsagn er korrekte? Svar med ‹‹Sann›› eller ‹‹Usann››. *Begrunnelse trengest ikkje på denne oppgåva.*

(i) Funksjonen $x \mapsto |x|$ er kontinuerlig.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x\left(x\ln(x)+\frac{2}{x^2}\right)} = 3.$

(iii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

(iv) $\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f$ kallast en øvre Darbouxsum for f på $[x_0, x_n]$.

(v) Likninga $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, løysast av $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(vi) Funksjonen $f\colon x \mapsto \sqrt{x^2}$ har ein invers $f^{-1}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

(vii) $\cos(x^2) = 1 + \mathcal{O}(x^4)$ der $|\mathcal{O}(x^4)| \le Cx^4$ for x nær 0.

(viii) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \le \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(ix) Det finst funksjonar som er deriverbare, men ikkje kontinuerlig deriverbare.

(x) $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}_{n\ge1}$ er ei veksande og begrensa følgje, men som ikkje konvergerer.

Oppgåve 2 *(10p)*

Berekn

(i) $$\int_{-1}^{1} x\cosh(x)\mathrm{d}x, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)}$$

(iii) $$\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Hint: Finn ein samanlikningsbar funksjon.

Oppgåve 3 *(10p)*

Skisser grafen $y = f(x)$ til

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}.$$

Bestem definisjonsmengde og verdimengde, nullpunkt, lokale og globale ekstrema, og eventuelle asymptoter til f.

Oppgåve 4 *(10p)*

Finn

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x-1)^3} \mathrm{d}x.$$

Oppgåve 5 *(10p)*

La

$$x^2 + (y+1)^2 = 1,$$

der vi betraktar $y = y(x)$ som ein funksjon av x nær punktet $(x, y) = (0, 0)$.

(i) Vis at

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Hint: Bruk gjerne implisitt derivasjon.

(ii) Bestem Taylorpolynomet (utan restledd) av andre grad til $y = y(x)$ i $x = 0$. Marker kva i Taylorpolynomet som kallast lineariseringa til f.

(iii) Kva er $y^{(37)}(0)$?

Oppgåve 6 *(10p)*

La

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\sin(x))^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) For kva verdiar av x konverger S_n når $n \to \infty$?

(ii) Berekn $\lim_{n\to\infty} S_n$ i desse tilfella.

Oppgåve 7 *(10p)*

(i) Løys initialverdiproblemet

$$\frac{y'(x)}{2x} - y(x) = 1, \qquad y(1) = 2.$$

(ii) Vis at løysinga er uniformt kontinuerlig på $[1, 2]$, men ikkje på $(1, \infty)$.

Oppgåve 8 *(10p)*

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vis/gi eit matematisk argument for at:

(i) f er kontinuerlig og deriverbar for $x \neq 0$.

(ii) f er kontinuerlig og deriverbar i $x = 0$.

(iii) f' ikkje er kontinuerlig i $x = 0$.

Ein trenger ikkje nødvendigvis å bruke ε/δ i denne oppgåva.