NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101 Grunnkurs i analyse (LF)**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Eksamensdato: 4. desember 2019

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:

Vektingen av hver oppgave er angitt i oppgaven. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser (obs. gjelder ikke Oppgave 1). Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 8

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 *(20p)*

Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med ‹‹Sann›› eller ‹‹Usann››. *Begrunnelse trenges ikke på denne oppgaven.*

(i) Funksjonen $x \mapsto |x|$ er kontinuerlig.

Sann.

$x \mapsto |x| = \sqrt{x^2}$, $\mathbb{R} \to [0,\infty)$ er sammensetningen av to kontinuerlige funksjoner.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x\left(x\ln(x)+\frac{2}{x^2}\right)} = 3.$

Usann.

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x\left(x\ln(x)+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{\ln(x)+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\ln(x)} = 0.$

(iii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Sann.

Formelen inngår i pensum. Kan bevises f.eks. ved hjelp av variabelsubstitusjonen $x = \sin(t)$, eller enhetsformelen sammen med formelen for den deriverte av en omvendt funksjon.

(iv) $\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) \sup\limits_{[x_{j-1},x_j]} f$ kalles en øvre Darbouxsum for f på $[x_0, x_n]$.

Sann.

Del av pensum.

(v) Likningen $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, løses av $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Sann.

Enkleste beviset er å derivere to ganger: $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$; $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$.

(vi) Funksjonen $f\colon x \mapsto \sqrt{x^2}$ har en invers $f^{-1}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Usann.

$f(1) = f(-1)$, så funksjonen er ikke injektiv og kan ikke ha en invers (på hele $\mathbb{R}$).

(vii) $\cos(x^2) = 1 + \mathcal{O}(x^4)$ hvor $|\mathcal{O}(x^4)| \le Cx^4$ for x nær 0.

Sann.

$\cos(y) = 1 + \mathcal{O}(y^2)$ etter Taylors formel (eller definisjon), så $y = x^2$ gir svaret.

(viii) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \le \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Usann.

Venstreleddet divergerer som en harmonisk rekke, mens høyreleddet konvergerer mot $\lim_{n\to\infty} \arctan(n) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$.

(ix) Det finnes funksjoner som er deriverbare, men ikke kontinuerlig deriverbare.

Sann.

F.eks. den i oppgave 8. Har også vært i øving og forelesning.

(x) $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ er en voksende og begrenset følge, men som ikke konvergerer.

Usann.

Alle begrensete voksende følger konvergerer. Kan også bruke $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1} = e^2$.

Oppgave 2 *(10p)*

Beregn

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\cosh(x)\mathrm{d}x, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

Funksjonen $x \mapsto x$ er odde, cosh er like, så produktet $x\cosh(x)$ er odde i x. Derfor er

$$\int_{-1}^{1} x\cosh(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Variabelsubstitusjonen $t = -x$ på $[-1, 0]$ gjør dette helt tydelig. Alternativt kan man bruke delvis integrasjon.

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)} \overset{u=\sin(t)}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$

Hint: Finn en sammenlikningsbar funksjon.

Vi vet at $\sin(x) \leq x$ for alle $x \geq 0$. Da blir

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} \geq \int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty,$$

ettersom integralet av $\frac{1}{x}$ divergerer (antideriverte er ln).

Merk at ε er fiksert her, og ikke spiller noen rolle i argumentet.

Oppgave 3 *(10p)*

Skisser grafen $y = f(x)$ til

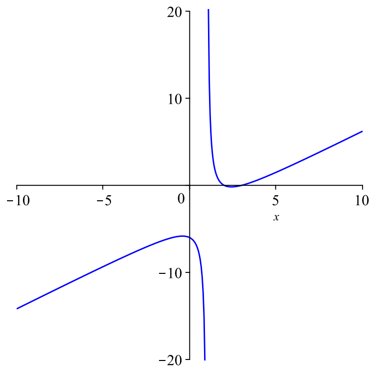
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}.$$

Bestem definisjonsmengde og verdimengde, nullpunkter, lokale og globale ekstrema, og eventuelle asymptoter til f.

Funksjonen

$$x \mapsto f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{x-1}, \qquad \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$

er rasjonal, og derfor kontinuerlig og uendelig deriverbar på hele sin definisjonsmengde. Nullpunkter er $x = 2$ og $x = 3$.



Figur 1: Skisse av grafen til f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-5)(x-1) - (x^2 - 5x + 6)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}, \end{aligned}$$

så f' er symmetrisk kring $x = 1$. Vi ser at

$$\begin{array}{lcl} f'(x) \to 1 & \text{når} & x \to \pm\infty, \\ f'(x) = 0 & \iff & x = 1 \pm \sqrt{2}, \\ f'(x) > 0 & \text{for} & |x - 1| \geq \sqrt{2}, \end{array}$$

mens $f'(x) < 0$ for $x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ (unntatt $x = 1$ der f' er udefinert). Videre er

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \frac{x^2 - 5x + 6 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x + 6}{x - 1} = -4,$$

så $y(x) = x - 4$ er en asymptote i $\pm\infty$ og funksjonen savner globale ekstrema (vertikal asymptote gis av $x = 1$). En mer direkte måte å se dette på er omskrivingen

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} = \frac{(x-1)^2 - 3(x-1) + 2}{x - 1} = \frac{2}{x-1} - 3 + (x - 1),$$

som i tillegg enkelt gir de lokale ekstremalverdiene

$$f(1 \pm \sqrt{2}) = \frac{2}{\pm\sqrt{2}} - 3 \pm \sqrt{2} = \pm 2\sqrt{2} - 3.$$

Her er $x = 1 + \sqrt{2}$ et lokalt minimum, og $x = 1 - \sqrt{2}$ lokalt maksimum, i samsvar med tegnstudiet av f' ovenfor. Verdimengden er derfor

$$V_f = (-\infty, -2\sqrt{2} - 3) \cup (2\sqrt{2} - 3, \infty).$$

Oppgave 4 *(10p)*

Finn

$$\int \frac{x^2 - 1}{x(x-1)^3} \mathrm{d}x.$$

Vi begynner med

$$\frac{x^2 - 1}{x(x-1)^3} = \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Etter kryssvis multiplikasjon,

$$x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx, \qquad x \notin \{0, 1\},$$

og sammenlikning av like potenser (x^0, x^1, x^2), får vi

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 2.$$

Derfor blir

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 1}{x(x-1)^3} \mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 2 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} \\ &= \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} + c, \end{aligned}$$

for en ubestemt konstant $c \in \mathbb{R}$.

Oppgave 5 *(10p)*

La

$$x^2 + (y+1)^2 = 1,$$

der vi betrakter $y = y(x)$ som en funksjon av x nær punktet $(x, y) = (0, 0)$.

(i) Vis at
$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Hint: Bruk gjerne implisitt derivasjon.

Med implisitt derivasjon for funksjonen $x \mapsto y(x)$, får vi
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + (y+1)^2\right) = 2x + 2(y+1)y' = \frac{d}{dx}1 = 0,$$
sånn at
$$y'(x) = -\frac{x}{y+1}.$$
Imidlertid er
$$(y+1)^2 = 1 - x^2 \quad \overset{(x,y)\approx(0,0)}{\Longrightarrow} \quad y + 1 = \sqrt{1-x^2},$$
og derfra følger
$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Man kan selvsagt derivere $y + 1 = \sqrt{1-x^2}$ direkte også, men i neste deloppgave er implisitt derivasjon avgjort raskere.

(ii) Bestem Taylorpolynomet (uten restledd) av andre grad til $y = y(x)$ i $x = 0$. Marker hva i Taylorpolynomet som kalles lineariseringen til f.

Det følger fra deloppgave (i) at $y(0) = y'(0) = 0$. En andre implisitt derivasjon gir oss videre
$$0 = 2 + 2(y')^2 + 2(y+1)y'' \overset{x=0}{=} 2 + 2y''(0),$$
det vil si, $y''(0) = -1$. Taylorpolynomet av andre grad i $x = 0$ er derfor
$$P_2(0;h) = \underbrace{y(0) + hy'(0)}_{\text{linearisering}} + \frac{h^2}{2}y''(0) = -\frac{h^2}{2}.$$
I dette tilfellet gis altså lineariseringen av tangenten $\tilde{y} = 0$.

(iii) Hva er $y^{(37)}(0)$?

Vi ser at y er en like funksjon i x, så alle dets odde deriverte er odde, og oppfyller derfor $y^{(2k+1)}(0) = 0$.

Det finnes mange alternative måter å løse oppgaven på. En er ansatsen $x = \cos(t)$, $y - 1 = \sin(t)$. Legg for øvrig merke til differensiallikningen $(y')^2 + (y+1)y'' = -1$ som dukker opp i deloppgave (ii), og som kan brukes til å bestemme høyere deriverte.

Oppgave 6 *(10p)*

La

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\sin(x))^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) For hvilke verdier av x konverger S_n når $n \to \infty$?

Vi vet at en geometrisk rekke

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k,$$

konvergerer hvis og bare hvis $|r| < 1$. Identifikasjonen $r = \sin(x)$ gir konvergens når $|\sin(x)| < 1$, det vil si for

$$x \notin \Sigma \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{\pi}{2} + j\pi : j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

For enhver $x = \frac{\pi}{2} + j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, divergerer rekken.

(ii) Beregn $\lim_{n\to\infty} S_n$ i disse tilfellene.

Ettersom

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1,$$

følger

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\sin(x))^k = \frac{1}{1 - \sin(x)}, \qquad x \notin \Sigma.$$

Oppgave 7 *(10p)*

(i) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{y'(x)}{2x} - y(x) = 1, \qquad y(1) = 2.$$

Likningen er veldefinert for $x \neq 0$, og især nær $x = 1$ (initialdata). En partikularløsning er $y_p(x) = -1$, men vi må addere en homogen løsning y_h

med $y_h(1) = 3$ for å oppfylle betingelsen $y(1) = 2$. Så lenge $x, y_h(x) \neq 0$, gjelder

$$\frac{y_h'(x)}{2x} - y_h(x) = 0 \iff \frac{y_h'(x)}{y_h(x)} = 2x \iff \ln|y_h(x)| = x^2 + C$$
$$\iff |y_h(x)| = e^C \mathrm{e}^{x^2} \iff y_h(x) = \tilde{C}\mathrm{e}^{x^2},$$

der $C, \tilde{C}$ er vilkårlige konstanter. Velg nå $\tilde{C}$ slik at $y_h(1) = 3$, det vil si, $\tilde{C} = \frac{3}{e}$. Det følger at

$$y(x) = \frac{3}{e}\mathrm{e}^{x^2} - 1,$$

som også løser likningen. (Merk at y selv er definert for alle $x \in \mathbb{R}$.)

Det går å løse likningen f.eks. også som en første ordens lineær likning ved integrerende faktor eller variasjon av konstanten. Ovenfor er den løst som en separabel likning.

(ii) Vis at løsningen er uniformt kontinuerlig på $[1, 2]$, men ikke på $(1, \infty)$.

Kontinuerlige funksjoner er uniformt kontinuerlige på kompakte (lukkede og begrensede) mengder. Ettersom løsningen ovenfor er kontinuerlig på $\mathbb{R}$, følger det derfor umiddelbart at den er uniformt kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$.

Betrakt nå $x_2 > x_1 > 1$. Ettersom $x \mapsto y(x) = \frac{3}{e}\mathrm{e}^{x^2} - 1$ er deriverbar på $\mathbb{R}$, gir sekantsetningen at

$$|y(x_1) - y(x_2)| \overset{x_1 < c < x_2}{=} |y'(c)||x_1 - x_2| = \frac{6c}{e}\mathrm{e}^{c^2}|x_1 - x_2| \geq e^{x_1^2}|x_1 - x_2|.$$

Med andre ord: for en gitt $\varepsilon > 0$, uansett hvor liten $|x_1 - x_2| < \delta$ er, vil $|y(x_1) - y(x_2)| > \varepsilon$ dersom x_1 bare er stor nok. Funksjonen er derfor *ikke* uniformt kontinuerlig på $(1, \infty)$.

Oppgave 8

(10p)

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vis/gi et matematisk argument for at:

(i) f er kontinuerlig og deriverbar for $x \neq 0$.

For $x \neq 0$ er f er sammensetning av elementære kontinuerlige funksjoner (rasjonale og trigonometriske), og er derfor selv kontinuerlig.

(ii) f er kontinuerlig og deriverbar i $x = 0$.

Kontinuitet i $x = 0$ følger av at

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} \left| x^2 \sin(\tfrac{1}{x}) \right| \overset{|\sin(\cdot)|\leq 1}{\leq} \lim_{x\to 0} x^2 = 0 = f(0),$$

der vi noterer at $\lim f(x) = 0$ er ekvivalent med $\lim |f(x)| = 0$.

Den deriverte i $x = 0$ gis enligt definisjonen av

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin(\tfrac{1}{h}) = 0,$$

per samme argument som ovenfor (skviseteoremet, sin er begrenset), så vi har funnet $f'(0) = 0$. Deriverbarhet impliserer også kontinuitet.

(iii) f' ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

For $x \neq 0$ følger det av produkt- og kjerneregelen (Leibniz' regel) at

$$f'(x) = 2x \sin(\tfrac{1}{x}) - \tfrac{x^2}{x^2} \cos(\tfrac{1}{x}) = 2x \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x}).$$

Selv om $2x \sin(\frac{1}{x}) \to 0$ da $x \to 0$, har det andre leddet ingen grenseverdi i $x = 0$: dersom vi f.eks. velger $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, er

$$f'(x_n) = \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0,$$

selv om $x_n \to 0$ da $n \to \infty$. Ettersom $f'(0) = 0$ viser dette at f' ikke er kontinuerlig i origo.

Man trenger ikke nødvendigvis å bruke ε/δ i denne oppgaven.