Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i **MA1101 Grunnkurs i analyse**

Faglig kontakt under prøven: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Dato: 11. oktober 2018

Tid (fra–til): 14:15–15.45

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Vektingen av hver oppgave er angitt i oppgaven. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser (obs. gjelder ikke Oppgave 1). Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Informasjon om trykking av midtsemesterprøve
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐

Oppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Marker på svarspapir med ‹‹Sann›› eller ‹‹Usann››. *Begrunnelse trenges ikke i denne oppgaven.*

(20p)

a) Funksjonen $x \mapsto x^3$ er omvendbar $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sann. La $f\colon x \mapsto x^3$. *Da er* f *odde, så det er tilstrekkelig å betrakte* $x \geq 0$. *Vi har*

$$(x^3)' = 3x^2 > 0 \qquad \textit{for alle} \qquad x \neq 0.$$

Funksjonen f *er videre kontinuerlig på hele* $\mathbb{R}$ *(den er et polynom), med*

$$f(0) = 0 \qquad \textit{og} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

så f *er omvendbar* $[0,\infty) \to [0,\infty)$. *Ettersom nå* $f(-x) = -f(x)$ *følger at* f *er omvendbar* $(-\infty, 0] \to (-\infty, 0]$ *er derfor* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Rekken $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ konvergerer for $|r| < 1$.

Sann. Merk først at

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k\right) - 1,$$

så vi kan betrakte $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$. *Da har vi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1,$$

da $|r^{n+1}| = |r|^{n+1} \to 0$ *for* $|r| < 1$. *Så*

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r} \in \mathbb{R}$$

er konvergent.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - \sin(x)x^2}{1+2x^3} = \frac{1+\pi}{2}$.

Usann.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - \sin(x)x^2}{1+2x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^3} \, \frac{1 - \frac{\sin(x)}{x}}{\frac{1}{x^3} + 2} \right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1-0}{0+2} = \frac{1}{2},$$

da $|\sin(x)| \leq 1$ *for alle* $x \in \mathbb{R}$.

d) Alle kontinuerlige funksjoner er deriverbare.

Usann.

$$x \mapsto |x|, \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

er kontinuerlig, men ikke deriverbar i $x = 0$, *da*

$$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1,$$

så høyre- og venstrederiverte er ulik. (Derimot er hver deriverbar funksjon også kontinuerlig.)

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$

Sann. Ettersom $\cos(x) = 1 - O(x^2)$ *ifølge Taylor (alternativt per definisjon), gjelder*

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{1 - O(x^2) - 1}{x} = \frac{O(x^2)}{x} = O(x) \to 0 \qquad \text{da } x \to 0.$$

Man kan alternativt bruke L'hôpital's regel:

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x) - 1) = 0 = \lim_{x \to 0} x,$$

med

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x) - 1)' = \lim_{x \to 0} (-\sin(x)) = 0 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to 0} x' = \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

så

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos(x) - 1)}{x'} = \frac{0}{1} = 0.$$

f) $|\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}| \leq 1$ for alle reelle tall $x \neq y$.

Sann. Ifølge sekantsetningen (middelverdisetningen) finnes et reelt tall c mellom x *og* y *sånn at*

$$\left| \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} \right| = |\cos(c)| \leq 1.$$

(Likhet er mulig kun i grensen $x = y$, *og man kan bruke periodisitet og paritet til* $\sin$ *til å vise dette.)*

g) $\inf_{n \in \mathbb{Z}} \{e^n\} = 0$.

Sann. På den ene siden er $e^n > 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. På den andre siden finnes, for hver $\varepsilon > 0$, en $n_0 < \log(\varepsilon)$ sånn at

$$e^{n_0} < e^{\log(\varepsilon)} = \varepsilon.$$

Dermed er 0 største nedre grense til $(e^n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

h) $|x - y| \geq |x| + |y|$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Usann. Valget $x = y = 1$ gir

$$|x - y| = |1 - 1| = 0 \qquad \textit{mens} \qquad |x| + |y| = 1 + 1 = 2.$$

(Den omvendte trekantulikheten er $|x - y| \geq ||x| - |y||$.)

i) $\int x^r \, \mathrm{d}x = x^{r+1}$ for alle $r \in \mathbb{R}$.

Usann. De riktige likhetene er

$$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \textit{const}, \qquad r \neq -1.$$

og

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log |x| + \textit{const}, \qquad (r = -1).$$

j) Hver monoton, begrenset følge har en delfølge som konvergerer.

Sann. Det er til og med sant at (i) hver begrenset følge har en delfølge som konvergerer, og (ii) at hver monoton, begrenset følge konvergerer (til sitt supremum eller infimum).

Oppgave 2 La $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Bestem naturlig definisjonsmengde og verdimengde til f og g.

(3p)

$f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så naturlig definisjonsmengde for f er

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Ettersom f er kontinuerlig med $f(0) = 0$, $f \geq 0$ og $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ blir da verdimengden

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x) \colon x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty).$$

For g gjelder i stedet $g(x) = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ nøyaktig når $x \geq 0$, så

$$D_g = [0, \infty).$$

Også g er kontinuerlig, med $g(0) = 0$, $g \geq 0$ og $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, så ifølge skjæringssetningen blir tilsvarende verdimengde

$$g([0, \infty)) = [0, \infty).$$

b) Hva er $f \circ g$ og $g \circ f$? Finn formel samt definisjons- og verdimengde.

(3p)

Sammensetningen

$$f \circ g \colon x \mapsto f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = |x|,$$

er definert på $D_g = [0, \infty)$ med verdimengde $[0, \infty)$, mens

$$g \circ f \colon x \mapsto g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|,$$

er definert på $D_f = \mathbb{R}$ med verdimengde $[0, \infty)$.

c) Er $g \circ f$ deriverbar? Beregn den deriverte; eller vis at den ikke finnes.

(4p)

Funksjonen $g \circ f \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ er gitt ved $x \mapsto |x|$, og har høyre- og venstre-deriverte i $x = 0$:

$$(g \circ f)'_{\pm}(0) = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \pm 1,$$

så den deriverte finnes ikke (i dette punktet; utenfor origo er den deriverte konstant $\frac{x}{|x|} = \operatorname{sign}(x) = \pm 1$).

Oppgave 3 Bestem

a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x - 2x^2 - 2}{x - 2}.$$

(3p)

Polynomet x^3+x-2x^2-2 har rot $x = 2$, så vi kan faktorisere $x^3+x-2x^2-2 = (x - 2)(x^2 + 1)$. Det følger at

$$\frac{x^3 + x - 2x^2 - 2}{x - 2} \overset{x\neq 2}{=} x^2 + 1 \to 5 \qquad \text{når} \qquad x \to 2.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j.$$

(4p)

Ettersom

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

følger

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2}\frac{n^2+n}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} \qquad \textit{når} \qquad n\to\infty.$$

c)

$$\sup_{x\in(0,\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sin(x)}.$$

(3p)

Funksjonen sin *er kontinuerlig med* $\sin(0) = 0$, *og* $\sin(x) > 0$ *for* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Derfor finnes, for hver* $B > 0$, *en verdi* $\varepsilon > 0$, *sånn at*

$$0 < \sin(x) < \frac{1}{B} \qquad \textit{for} \qquad 0 < x < \varepsilon,$$

og

$$\frac{1}{\sin(x)} > B \qquad \textit{når} \qquad 0 < x < \varepsilon.$$

Ettersom B *kan velges vilkårlig stor, finnes ingen (endelig) øvre grense til* $\sin(x)$ *for* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *og vi har*

$$\sup_{x\in(0,\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sin(x)} = \infty.$$

Oppgave 4 Beregn Taylorpolynomet av tredje grad til

$$f(x) = x\cos(x)$$

i $x_0 = 0$. Angi likningen for tangenten til f i $x = 0$.

(5p)

Vi beregner

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\cos(x) = \Big|_{x=0} 0,\\
f'(x) &= \cos(x) - x\sin(x) = \Big|_{x=0} 1,\\
f''(x) &= -\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) = -2\sin(x) - x\cos(x) = \Big|_{x=0} 0,\\
f'''(x) &= -2\cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = -3\cos(x) + x\sin(x) = \Big|_{x=0} - 3.
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomet av tredje grad til f i $x_0 = 0$ er derfor

$$
\begin{aligned}
P_3(h;0) &= f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(0))}{3!}h^3\\
&= 0 + h + 0 - \tfrac{3}{6}h^3\\
&= h - \tfrac{1}{2}h^3.
\end{aligned}
$$

(Alle like potenser i Taylorutviklingen forsvinner, fordi $x \mapsto x\cos(x)$ er en odde funksjon, da $x \mapsto x$ er odde, og $\cos$ er like.) Tangenten i et punkt x_0 er gitt ved

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

det vil si

$$y = x,$$

i tilfellet $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Oppgave 5 Vis ved et ε/δ-argument at

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2,$$

er kontinuerlig i $x_0 = 1$.

(5p)

La $\varepsilon > 0$. Vi ønsker å finne $\delta > 0$, sånn at

$$|f(x) - f(1)| = |x^2 - 1| = |x+1|\,|x-1| < \varepsilon,$$

dersom $|x - 1| < \delta$.

(i) Velg først $\delta < 1$, sånn at

$$|x+1| = |(x-1)+2| \overset{\Delta\text{-ulikh.}}{\leq} |x-1| + |2| < 3,$$

for $|x - 1| < \delta < 1$.

(ii) *Da er også*

$$|f(x) - f(1)| = |x+1|\,|x-1| < 3|x-1| < \varepsilon$$

dersom

$$|x-1| < \delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

Så valget $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ *viser at* f *er kontinuerlig i punktet* $x_0 = 1$.