Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Merk at øvingsoppgavene iblandt kan skille seg noe fra tilsvarende oppgaver i Adams&Essex. Det er da versjonene nedenfor som gjelder. Merk også at oppgaver med ordet 'beregn' ikke fordrer samme stringens som oppgaver med ordet 'bevis'; man trenger for beregningsoppgaver ikke bruke ϵ, δ, N-definisjonene, men kan regne direkte med limes-notasjon (f.eks. $x^2 \to 0$ når $x \to 0$).

1.2.27, 41, 58, 61 Beregn, ved hjelp av setninger og regneregler for grenser (d v s ikke nødvendig med ε) følgende grenseverdier.

a) $\lim_{t\to 0} \frac{t^2+3t}{(t+2)^2-(t-2)^2}$

b) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ for $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0.$

c) $\lim_{x\to a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2}, \qquad a > 0.$

d) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ for $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le -1, \\ x^2+1, & x > -1. \end{cases}$

1.2.55 Angi hva i definisjonen for ensidige grenseverdier som ikke er oppfylt for uttrykket

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3 - x}.$$

Obs. at notasjonen ovenfor ikke er et matematisk utsagn, ettersom grensen ikke eksisterer!

1.2.77 La $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonene gitt ved

$$f(x) = x^3, \qquad g(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

Her er $x^{1/3}$ den reelle løsningen y til likningen $y^3 = x$.

a) Bestem mengden $M_{f\ge g}$ der $f(x) \ge g(x)$, og mengden $M_{f\le g}$ der $f(x) \le g(x)$.
Hint: tegn gjerne grafene til de to funksjonene som et komplement til beregningene.

b) La videre h være en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som oppfyller

$$g(x) \le h(x) \le f(x) \quad \text{for} \quad x \in M_{f\ge g}$$

og

$$f(x) \le h(x) \le g(x) \quad \text{for} \quad x \in M_{f\le g}.$$

Avgjør for hvilke verdier $x_0 \in \mathbb{R}$ du kan bestemme $\lim_{x\to x_0} h(x)$, og angi grenseverdiene for disse x_0.

$\boxed{\text{1.3.1,12}}$ Bevis at følgende grenser eksisterer og er riktige.

a) Ved hjelp av ϵ/N: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-3} = \frac{1}{2}$.

b) Ved hjelp av N/δ: $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(3-x)^2} = \infty$.

Én av oppgavene ovenfor er frivillig, men det anbefales å prøve seg på begge.

$\boxed{\text{1.3.9,25,30}}$ Beregn, ved hjelp av setninger og regneregler for grenser, følgende grenseverdier.

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^3}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

$\boxed{\text{1.4.23}}$ Med x antall programmerere kan en bedrift utvikle et produkt på T dager, der

$$T = 100 - 30x + 3x^2.$$

For raskest mulig produktutvikling, hvor mange programmerere skal bedriften ansette til denne oppgaven?

$\boxed{\text{1.4.29}}$ Bevis at $f(x) = x^3 + x - 1$ har et nullpunkt på intervallet $[0, 1]$.

Merk at 'et' betyr 'minst et', mens 'ett' ville ha betydd 'nøyaktig ett'.

Én av de to siste oppgavene er valgfri å levere inn (det vil ikke telle negativt dersom man prøver seg på begge).

$\boxed{\text{1.4.17}}$ Bestem verdien av $k \in \mathbb{R}$ slik at

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ k - x^2, & x > 2, \end{cases}$$

definerer en kontinuerlig funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Avgjør også om funksjonen vil være høyrekontinuerlig, venstrekontinuerlig eller diskontinuerlig for andre verdier av k, i $x = 2$.

$\boxed{9}$ Skriv ned en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er venstrekontinuerlig (men ikke høyrekontinuerlig) i $x = -1$, kontinuerlig i $x = 0$, og diskontinuerlig i $x = 2$.