MA1101 Grunnkurs i analyse I
Høst 2019

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 9

Øvingen innholder blant annet repetisjonsoppgaver på noen tema som vist seg mest vanskelig basert på tilbakemeldinger fra de som retter innleveringene.

$\boxed{1}$ Vis at $x^2 - \cos(x)$ har nøyaktig to nullpunkter.

$\boxed{2}$ Vis, ved hjelp av $\varepsilon - \delta$, at $f\colon x \mapsto x^3$ er

a) kontinuerlig i hvert fiksert punkt $x_0 \in \mathbb{R}$,

b) uniformt kontinuerlig på intervallet $[0, a]$ for en gitt $a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Bruk middelverdisetningen(sekantsetningen) til å vise at ln ikke er uniformt kontinuerlig på $(0, 1)$.

$\boxed{4}$ La

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

a) Bestem den (naturlige) definisjonsmengden, og bildet/verdimengden, til cosh.

b) Er cosh injektiv, surjektiv, bijektiv fra den naturlige definisjonsmengden til $\mathbb{R}$?

c) Finn et maksimalt intervall der cosh er injektiv, og beregn den deriverte til $(\cosh)^{-1} = \operatorname{arccosh}$ der. Skriv ned definisjonsmengde og bilde/verdimengde til den inverse funksjonen arccosh som du har definiert.

$\boxed{4.8.11{,}12}$ La et rektangel være innskrevet i en halvsirkel med gitt radius $r > 0$ (alle hjørner i rektangelet ligger på halvsirkelens ytterkanter, egentlig halvdiskens ytterkanter).

a) Maksimér arealet til et rektangel innskrevet i en halvsirkel med gitt radius.

b) Maksimér omkretsen til et rektangel innskrevet i en halvsirkel med gitt radius.

$\boxed{5.5.4,15}$ Beregn

a)

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

b)

$$\int_0^e a^x dx \quad (a > 0)$$

$\boxed{5.5.49}$ Følgende utregning inneholder en feil:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -1 + \frac{1}{-1} = -2.$$

Vis hva som gikk galt i utregningene. Hvorfor kan ikke -2 være en fornuftig løsning på integralet?

$\boxed{8}$ La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon med

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq B$$

for et endelig tall B. Vis ved et ε/δ-argument at funksjonen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

er kontinuerlig i hvert punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.