Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2020

Løsningsforslag — Øving 10

$\boxed{1}$ **a)** Her kan delvis integrasjon bli nyttig. Vi setter

$$\begin{aligned} u &= \ln(x), \\ \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ v &= x \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Da blir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x \\ &= -\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) - 1. \end{aligned}$$

Grenseverdien $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$ må bestemmes, om den eksisterer i det hele tatt. Her bruker vi L'Hôpitals regel.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Vi kan konkludere at

$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1.$$

b) Vi bruker substitusjonen $x = u + \frac{1}{2}$ og $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Da får vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-u)}} \\ &= 2\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - u^2}} \\ &= 2\lim_{r\to 1/2^-} \arcsin(2u)\big|_0^r = \pi. \end{aligned}$$

c) Ettersom $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ og $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)$, bruker vi substitusjonen $u = \cos(x)$. Vi får

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 -\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln(u)]_0^1 = -\lim_{u\to 0^+} \ln(u).$$

Dette integralet divergerer.

d) Her blir substitusjonen $u = \ln(x)$ nyttig.

$$\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln(u)]_1^\infty = \lim_{u\to\infty} \ln(u).$$

Nok en gang divergerer det.

e) Funksjonen $\frac{x}{1+x^4}$ er odde. Integralet av denne på $\mathbb{R}$ konvergerer derfor mot 0.

f) Vi ser deler opp integralet i to og får

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Dette konvergerer (mot 2).

$\boxed{2}$ **a)** På intervallet $(1,\infty)$ begrenses funksjonen $\frac{x^2}{x^5+1}$ ovenfra av $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$. Ulikheten

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^5+1} = \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^5+1} + \int_1^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^5+1} \le \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^5+1} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

lar oss beslutte at integralet konvergerer. Dette kommer av at integralet $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ er et kjent (uekte) konvergent integral.

b) Vi viser at integralet $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ divergerer. Først substituerer vi $x = u^2$ og får

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}$$

og dermed $u = v - 1$

$$\int_0^\infty \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u} = 2\int_1^\infty \frac{v+1}{v}\,\mathrm{d}v.$$

Dette divergerer dersom $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v}$ divergerer, noe vi vet at det gjør.

c) Ettersom funksjonen e^{-x^3} er begrenset på $[0,1]$, kan vi like gjerne se på integralet $\int_1^\infty e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$. Om dette integralet har en verdi, er denne mindre enn veriden til $\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Sistnevnte integral er som kjent lik

$$\left[-e^{-x}\right]_1^\infty = e - \lim_{x\to\infty} e^{-x} = e.$$

Det opprinnelige integralet blir dermed konvergent.

d) Vi viser at integralet $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ divergerer. Her kan vi bruke at $e^x > e^{-1}$ for $-1 < x < 1$. Det følger nemlig at

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+x}\,\mathrm{d}x > \int_{-1}^1 \frac{1/e}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1/e}{1+x}.$$

Det er tilstrekkelig å vise at integralet $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x}$ divergerer. Nå bruker vi substitusjonen $u = 1 + x$ og får

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

som vi vet divergerer.

$\boxed{3}$ La $G(x)$ være en vilkårlig antiderivert av $\frac{1}{1-x^2}$. Denne eksisterer på intervallet $(0,1)$, og da spesielt dersom $x = \sin\theta$ eller $x = \cos\theta$, der $\theta \in (0, \pi/2)$. Nå benytter vi oss av analysens fundamentalteorem for å utrykke $F(\theta)$.

$$F(\theta) = \int_{\cos\theta}^{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = G(\sin\theta) - G(\cos\theta).$$

Vi deriverer.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{\cos\theta}^{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}G(\sin\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}G(\cos\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta \\ &= \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} - \frac{-\sin\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

Som nevnt over er både $\cos\theta$ og $\sin\theta$ i intervallet $(0,1)$ for $\theta \in (0, \pi/2)$. Dette gjør $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}F(\theta)$ positiv for alle $\theta \in (0, \pi/2)$. Spesielt har vi ingen kritiske punkter.

Vi deriverer den deriverte ved bruk av kvotientregelen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right) = \frac{-(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} + \frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

Et vendepunkt må derfor ha egenskapen at $\sin^3\theta - \cos^3\theta = 0$, som medfører at $\sin\theta = \cos\theta$. For $\theta \in (0, \pi/2)$ skjer dette kun for $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{4}$ Dette er et riemannintegral dersom $\sin(x)/x$ er begrenset ovenfra på $[0, \pi]$. Dette er tilfellet, ettersom det eneste potentielt problematiske punktet er $x = 0$, der

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

$\boxed{5}$ Her er

$$\int_a^b (f(x)-t)^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)^2 - 2f(x)t + t^2)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x - 2\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)t + t^2(b-a).$$

La $J = \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$ and $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Vi skal minimere funksjonen

$$V(t) = Jx - 2It + (b-a)t^2$$

med hensyn på t. Den deriverte er $V'(t) = 2(b-a)t - 2I$, som gir at $V'(t) = 0$ hvis og bare hvis $t = I/(b-a)$. Dette er minimumspunkt dersom den andrederiverte er positiv, noe den er. Konklusjon: Vi oppnår minimumsveriden i $t = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$.

$\boxed{6}$ La $F(t)$ være en vilkårlig antiderivert av $\frac{\cos(\pi t^2)}{t^2+1}$. Da blir

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\cos(\pi t^2)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{F(1+\frac{1}{n}) - F(1)}{1/n}$$

som lar oss benytte L'Hôpitals regel (pluss kjerneregelen) og analysens fundamentalteorem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{F(1+\frac{1}{n}) - F(1)}{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{n^2}\right) F'(1+\frac{1}{n})}{-1/n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi(1+\frac{1}{n})^2)}{(1+\frac{1}{n})^2+1} \\ &= \lim_{t\to 1^+} \frac{\cos(\pi t^2)}{t^2+1} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

7 Siden $f^{-1}(3) = 1$ får vi

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x)|_{x=3} = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)|_{x=f^{-1}(3)}} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

8 a) La $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at for $|x-0| = |x| < \delta$ så har vi $|f(x) - f(0)| = |3x \sin \frac{1}{x} - 0| = |3x \sin \frac{1}{x}| < \varepsilon$. Merk at $|\sin y| \leq 1$ for alle $y \in \mathbb{R}$, så $3x \sin \frac{1}{x}| \leq |3x|$. La nå $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$. For $|x| < \delta$ er da

$$|f(x) - f(0)| = |3x \sin \frac{1}{x}| \leq 3|x| < 3\delta < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Dette viser at f er kontinuerlig i $x = 0$.

b) Ved definisjonen av den deriverte

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{3h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 3 \sin \frac{1}{h}$$

og siden grensen ikke finnes er f ikke deriverbar i 0.

c) Vi vet fra oppgave a) at f er en kontinuerlig funksjon, og vi ser på et lukket begrenset intervall $[-1, 1]$. Ved Teorem 4 i Appendiks IV er kontinuerlige funksjoner på lukkede, begrensede intervaller uniformt kontinuerlige. Det følger at f er uniformt kontinuerlig.