Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 11

1

a) Alle ledd av form $y^{(n)}$ er av første orden, så differensiallikningen er lineær. Siden vi har et ledd x for seg selv er differensiallikningen ikke-homogen.

b) Dette er en differensiallikning i x, og faktoren $\cos x$ gjør den ikke-lineær.

c) Dette er en differensiallikning i y, og leddet $\frac{1}{y}$ gjør at differensiallikningen er ikke-lineær.

2

a) Den integrerende faktoren er $e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$. Vi multipliserer ligningen med denne og får

$$\begin{aligned}
& y'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\frac{1}{x^2}y = x^2\frac{1}{x^2} = 1 \\
\implies & \frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{x^2}\right) = 1 \\
\implies & y\frac{1}{x^2} = x + C \\
\implies & y = x^3 + Cx^2
\end{aligned}$$

der C er en vilkårlig konstant.

b) Den integrerende faktoren er $e^{2\ln|x|} = x^2$. Vi multipliserer ligningen med denne og får

$$\begin{aligned}
& y'x^2 + \frac{2}{x}x^2y = \frac{x^2}{x^2} = 1 \\
\implies & \frac{d}{dx}\left(yx^2\right) = 1 \\
\implies & yx^2 = x + C \\
\implies & y = \frac{x+C}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2},
\end{aligned}$$

der C er en vilkårlig konstant.

c) Den integrerende faktoren er $e^{\ln(\cos(x))} = \cos(x)$. Vi multipliserer ligningen med denne og får

$$\begin{aligned}
& y'\cos(x) - \sin(x)y = \cos(x) \\
\implies & \frac{d}{dx}\left(y\cos(x)\right) = \cos(x) \\
\implies & y\cos(x) = \sin(x) + C \\
\implies & y = \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)},
\end{aligned}$$

der C er en vilkårlig konstant.

d) Vi kan skrive

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = f(\frac{y}{x})$$

så dette er en førsteordens homogen differensiallikning. Vi innfører $v = \frac{y}{x}$. Da får vi

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v)-v}{x} = \frac{\frac{1+v}{1-cv} - v}{x} = \frac{\frac{1+v-v(1-v)}{1-v}}{x} = \frac{\frac{1+v^2}{1-v}}{x}$$

som gir

$$\begin{aligned} \frac{1-v}{1+v^2}dv &= \frac{dx}{x} \\ \Longrightarrow \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2v}{1+v^2}\right)dv &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Vi integrerer på begge sider og får

$$\arctan(v) - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+v^2) = \ln|x| + C$$

som vi skriver om til

$$\begin{aligned} 2\arctan(\frac{y}{x}) &= \ln(1+\frac{y^2}{x^2}) + 2\ln|x| + C \\ &= \ln(1+\frac{y^2}{x^2}) + \ln x^2 + C \\ 2\arctan(\frac{y}{x}) &= \ln(x^2+y^2) + C \end{aligned}$$

Dette er vårt endelige svar.

e) Dette er en separabel differensialligning. Vi skriver om ligningen og får

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= e^x \sin(t) \\ e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \sin t\,\mathrm{d}t \\ -e^{-x} &= -\cos t + C \\ x &= -\ln(\cos t - C) \end{aligned}$$

Konklusjonen blir at den generelle løsningen er $x = -\ln(\cos t + D)$ der D er en vilkårlig konstant.

f) Ved å dividere med x får vi likningen

$$y' = \frac{y}{x} + \cos^2(\frac{y}{x}) = f(\frac{y}{x})$$

Vi innfører $v = \frac{y}{x}$. Da får vi

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{f(v)-v}{x} = \frac{v+\cos^2 v - v}{x} = \frac{\cos^2 v}{x} \\ \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2 v}dv &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Ved å integrere på begge sider får vi

$$\tan v = \ln|x| + C_1 = \ln C|x|$$

hvor vi har satt $C_1 = \ln C$. Løsningen blir da

$$\begin{aligned}\tan(\frac{y}{x}) &= \ln C|x| \\ \Longrightarrow \frac{y}{x} &= \arctan(\ln C|x|) \\ \Longrightarrow y &= x\arctan(\ln C|x|)\end{aligned}$$

g) Dette er en separabel differensiallikning. Vi skriver om likningen og får

$$\frac{dy}{dx} = y^2(1-y) \implies \frac{dy}{dx}\frac{1}{y^2(1-y)} = 1 \implies \int \frac{-1}{y^2(y-1)}dy = \int dx.$$

Vi kan nå løse integralet på venstre side ved hjelp av delbrøkoppspaltningen

$$\frac{-1}{y^2(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y-1}.$$

Ved å multiplisere med $y^2(y-1)$ på begge sider får vi at $-1 = (A+C)y^2 + (B-A)y - B$ og $A = B = -C = 1$. Dermed kan vi skrive om integralet og løse det som

$$\int \frac{-1}{y^2(y-1)}dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \ln|y| - \ln|y-1| - \frac{1}{y} = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right| - \frac{1}{y}.$$

Høyresiden av differensiallikningen er integralet $\int dx = x + C$. Løsningen på likningen blir da

$$\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| - \frac{1}{y} = x + C$$

$\boxed{3}$ **a)** Den integrerende faktoren er e^{x^2}. Vi multipliserer likningen med denne og får

$$\begin{aligned}e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y &= e^{x^2}e^{-x^2} = 1 \\ \Longrightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2}y) &= 1 \\ \Longrightarrow e^{x^2}y &= x + C \\ \Longrightarrow y &= e^{-x^2}(x+C)\end{aligned}$$

Kravet $y(0) = 1$ gir

$$e^{-0^2}(0+C) = 1 \Longrightarrow C = 1$$

Løsningen blir da

$$y = e^{-x^2}(x+1)$$

b) Denne ligningen er separabel.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2(y^2+1)x \\ \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} &= \int 2x\,\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow \arctan(y) &= x^2 + C \\ \Longrightarrow y &= \tan(x^2 + C).\end{aligned}$$

Dette er den generelle løsningen. Initialbetingelsen $y(0) = 1$ bestemmer C:

$$\arctan(1) = C \Longrightarrow C = \pi/4.$$

Løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = \tan\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

c) Den integrerende faktoren er e^{10x}. Vi multipliserer ligningen med denne og får

$$\begin{aligned}
e^{10x}y' + e^{10x}10y &= e^{10x} \\
\Longrightarrow \frac{d}{dx}(e^{10x}y) &= e^{10x} \\
\Longrightarrow e^{10x}y &= \frac{e^{10x}}{10} + C \\
\Longrightarrow y &= e^{-10x}\left(\frac{1}{10}e^{10x} + C\right) = \frac{1}{10} + Ce^{-10x}
\end{aligned}$$

Kravet $y\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5}$ gir

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{10} + Ce^{-10\frac{1}{10}} \Longrightarrow C = \frac{e}{10}.$$

Løsningen blir da

$$y = \frac{1}{10} + \frac{e}{10}e^{-10x}.$$

4 **a)** Vi skal bestemme hvilke funksjoner $y(x)$ som tilfredstiller integralligningen

$$y(x) = 2 + \int_0^x \frac{t}{y(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Anta at det finnes en antiderivert F til $\frac{t}{y(t)}$ i et intervall som inneholder 0 (vi kommer tilbake til hvor stort dette intervallet er). Vi deriverer (1) og bruker analysens fundamentalteorem

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2 + \int_0^x \frac{t}{y(t)}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x) - F(0)\right) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x}{y(x)}
\end{aligned}$$

Dette har gitt oss en separabel differensialligning vi kan løse.

$$\begin{aligned}
\int y\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + C \\
\Longrightarrow y &= \sqrt{x^2 + D}
\end{aligned}$$

der C er en vilkårlig konstant og $D = 2C$. Setter vi inn $x = 0$ i (1), faller initialbetingelsen $y(0) = 2$ ut. Dermed er $D = 4$. Løsningen blir altså

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Siden funksjonen $\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}$ er riemannintegrerbar på $[0, x]$ for alle $x \in \mathbb{R}$, blir definisjonsmengden til løsningen $y(x)$ hele $\mathbb{R}$.

b) Her er integralligningen

$$y(x) = 3 + \int_0^x e^{-y(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Vi bruker samme teknikk som over.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3 + \int_0^x e^{-y(t)}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x) - F(0)\right)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{-y(x)}\end{aligned}$$

der $F(t)$ er en antiderivert til $e^{-y(t)}$. Vi løser differensialligningen

$$\begin{aligned}\int e^{y(x)}\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x\\ \implies e^{y(x)} &= x + C\\ \implies y(x) &= \ln(x + C)\end{aligned}$$

der C er en vilkårlig konstant. Her er initialbetingelsen $y(0) = 3$, som gir at $D = e^3$. Løsningen vi har kommer frem til er definert så lenge $x > -e^3$. Dessuten blir $e^{-y(t)}$ integrerbar. Vi konkluderer med at løsningen er

$$y(x) = \ln(x + e^3)$$

der $x > -e^3$.

$\boxed{5}$ **a)** Her kan det være lurt å delbrøksoppspalte integranden.

$$\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^\infty \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_2^\infty \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Begge integrander på høyre side er positive. Om én av dem divergerer, vil også det opprinnelige integralet divergere. Vi undersøker første ledd på høyre side vha substitusjonen $x = y + 1$

$$\int_2^\infty \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2}\sqrt{y+1}}{y}\,\mathrm{d}y > \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2}\sqrt{y}}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}y$$

Vi har sett i forelesning at integralet på høyresiden divergerer. I sum divergerer $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

b) Her bruker vi ulikheten $\sin(x) \leq x\sin(x)$, som gjelder for $x \geq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{x+\sin(x)}{x^2+\sin(x)}\,\mathrm{d}x > \int_1^\infty \frac{x+\sin(x)}{x^2+x\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Integralet på høyresiden divergerer. Derfor divergerer også venstresiden.

c) Vi viser at integralet divergerer. Her integrerer vi en positiv funksjon. For å vise at det divergerer er det derfor tilstrekkelig å vise at integralet $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{xe^x}$ divergerer. Ettersom $0 < e^x < 3$ for $0 \leq x \leq 1$ har vi

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{xe^x} > \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Integralet på høyre side er divergent. I konklusjon er $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{xe^x}$ divergent.

d) Vi har sett på øving 8 at den antideriverte av $\frac{1}{\sin(x)}$ er $\ln|\tan(x)|$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \ln\tan(x) - \lim_{x\to -\pi/2} \ln\tan(x) + \lim_{x\to \pi/2} \ln\tan(x) - \lim_{x\to 0^+} \ln\tan(x) \\
&= \left(\lim_{x\to 0^-} \ln\tan(x) - \lim_{x\to 0^+} \ln\tan(x)\right) + \left(\lim_{x\to \pi/2} \ln\tan(x) - \lim_{x\to 0^+} \ln\tan(x)\right)
\end{aligned}$$

Utrykket i siste parentes er mulig å finne verdien av, men begge leddene i den andre parentesen er udefinerte. Selv om det ene "er det negative av det andre" er summen av to udefinerte verdier forstsatt udefinert. Integralet vi startet med er derfor divergent.

6 På intervallet $[0,1]$ har vi ulikheten

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$$

(denne gjelder for $0 \leq x \leq \pi/2$; se på sekanten som forbinder $(x,y) = (0,0)$ med $(x,y) = (\pi/2, 1)$ på grafen til $y = \sin x$). Følgelig er

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^1 \frac{2}{\pi}\frac{x}{x^p}\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Høyresiden divergerer dersom $p-1 \geq 1$. Derfor vil venstresiden divergere for de samme verdiene, altså for $p \geq 2$.

Vi har også ulikheten

$$\sin(x) \leq x$$

for $0 \leq x$. Denne gir at

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x$$

Siden høyresiden konvergerer for $p < 2$, konvergerer også venstresiden i dette tilfellet.

Ingen verider for p gjenstår. Verdiene $p < 2$ er dermed de vi var ute etter.

$\boxed{7}$ a) Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0) \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

er begrenset på $[-1, 1]$, men ikke kontinuerlig i origo.

b) Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1/2 \\ 2 & x = 1/2 \end{cases}$$

er kontinuerlig i origo, men ikke uniformt kontinuerlig på $[-1, 1]$, siden den ikke engang er kontinuerlig på $[-1, 1]$.

c) Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 3x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er uniformt kontinuerlig på $[-1, 1]$, men ikke deriverbar i $x = 0$. Dette viste vi i siste oppgave på øving 10.

Et annet eksempel er $f(x) = |x|$. Den er uniformt kontinuerlig siden det er en kontinuerlig funksjon på et lukket, begrenset intervall. Vi vet også at f ikke er deriverbar i origo.

d) Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar på $[-1, 1]$, men ikke kontinuerlig deriverbar. La oss vise dette. Ved vanlige derivasjonsregler er

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

for $x \neq 0$. Så vi ser at $\lim_{x \to 0} f'(x)$ ikke finnes. Derimot er

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

så den deriverte i $x = 0$ finnes. Dermed er f deriverbar på $[-1, 1]$, men ikke kontinuerlig deriverbar.