Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 12

$\boxed{1}$ Først bemerker vi at

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Det er nå klart at $1 - \frac{2}{n+1} > 1 - \frac{2}{m+1}$ dersom $n > m$. Dermed er $\min A = \inf A = 1 - \frac{2}{1+1} = 0$.

La oss vise at $\sup A = 1$. Ettersom $1 - \frac{2}{n+1} < 1$ for alle n, er det tydelig at $\sup A \leq 1$. Dersom $\sup A < 1$, ville det ha eksistert en ε slik at $1 - \frac{2}{n+1} \leq 1 - \varepsilon$ for alle n. Dette er umulig, siden ulikheten ikke gjelder for $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$.

Om A har et maksimum må det sammenfalle med $\sup A$. Dersom $\max A$ finnes, må det også finnes en n slik at $\frac{n-1}{n+1} = 1$. Dette skjer ikke for noen positive heltall n. Derfor har ikke A et maksimum.

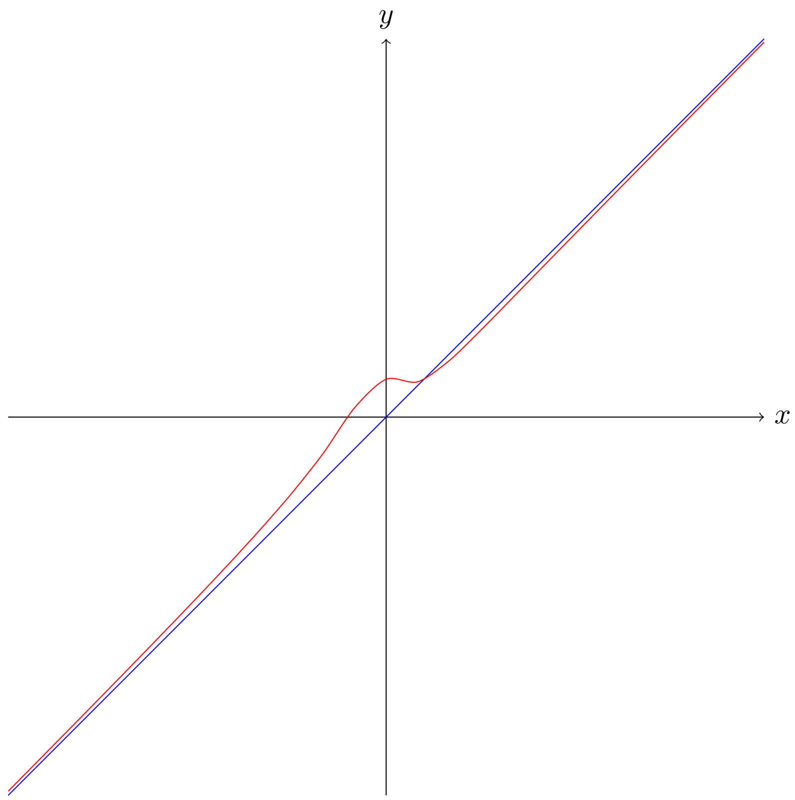
$\boxed{2}$ **a)** Grafen til funksjonen $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ har ingen vertikale asymptoter, siden nevneren alltid er positiv. Dessuten er graden til telleren større enn graden til nevneren, så det finnes ingen horisontale asymptoter heller.

Vi er på utkikk en (eventuell) skrå asymptote. Se på identiteten

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{1-x}{x^2+1}.$$

Når x går mot $\pm\infty$, går høyresiden mot x. Dette gir oss en skrå asymptote langs linjen $y = x$.

For å sjekke at vi har rett, tegner vi grafen til f (i rødt nedenfor) og sammenligner denne med $y = x$ (i blått nedenfor).



b) Oppgaven spør etter polynomet

$$T_{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Vi finner dette maclaurinpolynomet av grad 2 ved derivasjon. Først og fremst er

$$f(0) = \frac{0^3 + 1}{0^2 + 1} = 1.$$

Vi bruker kvotientregelen til å finne den dervererte

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{x^3+1}{x^2+1} = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

så $f'(0) = 0$. Vi deriverer igjen,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(4x^3+6x-2)\times(x^2+1) - 4x(x^2+1)\times(x^4+3x^2-2x)}{(x^2+1)^4}$$

så $f''(0) = -2$. Maclaurinpolynomet av grad 2 blir

$$T_{f,0}(x) = 1 - x^2.$$

c) Først benytter vi skjæringssetningen til å vise at et slikt nullpunkt finnes. Her er nemlig

$$f(1) = \frac{1^3+1}{1^2+1} = 1 < \frac{3}{2} \quad \text{og} \quad f(2) = \frac{2^3+1}{2^2+1} = \frac{9}{5} > \frac{3}{2}.$$

Det gjenstår å vise at dette nullpunktet er unikt. Det er tilstrekkelig at den deriverte til f ikke skifter fortegn i intervallet $[1, 2]$. Her er

$$f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = x\frac{x^3 + 3x - 2}{(x^2+1)^2}$$

og alle faktorer på høyre side er positive dersom $x \geq 1$ (for $x^3 + 3x - 2$ holder det å påpeke at $1^3 + 3 \times 1 - 2 = 2$ og at $x^3 + 3x - 2$ er voksende for $x \geq 1$). Dermed er den deriverte positiv på $[1, 2]$, og vi konkluderer med at nullpunktet er unikt.

d) Ettersom f er positiv på $[0, 1]$, er arealet som beskrives i oppgaveteksen uttrykt ved integralet

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Vi forenkler, steg for steg.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x + \frac{1-x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} + [\arctan(x)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2),
\end{aligned}$$

der $u = x^2 + 1$.

$\boxed{3}$ Vi starter med å skrive om summen slik at den grupperer to og to påfølgende ledd sammen til ett ledd, og summerer fra $i = 1$ til n i stedet for $k = 1$ til $2n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k(k+1) &= \sum_{i=1}^{n} \big(-(2i-1)(2i-1+1) + 2i(2i+1)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2i\big(2i+1-(2i-1)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 4i \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i = 4\frac{n(n+1)}{2} = 2n(n+1).
\end{aligned}$$

Dette lar oss forenkle uttrykket.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k(k+1) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}2n(n+1)\right) \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right) \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2}\right) \\
&= 2,
\end{aligned}$$

der vi har brukt L'Hôpitals regel to ganger.

Alternativ løsning:

Først setter vi inn $k(k+1) = 2\sum_{i=1}^{k} i$ i uttrykket $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k(k+1)$. Da får vi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \times 2\sum_{i=1}^{k} i\right) = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \sum_{i=1}^{k} i\right).$$

Dobbeltsummen $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sum_{i=1}^{k} i$ kan visualiseres som følger

$$\begin{aligned}
&-1 \\
&1+2 \\
&-1-2-3 \\
&1+2+3+4 \\
&\qquad\qquad\ddots \\
&-1-2-3-4-\cdots-(2n-1) \\
&1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n
\end{aligned}$$

Her har vi $2n$ rader, og alternerende rekker langs kolonnene. Om vi summerer kolonnevis ender vi opp med

$$0+2+0+4+\cdots 0+2n = 2(1+2+\cdots+n) = n(n+1).$$

Ut i fra dette kan vi sette opp grenseverdien som

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k(k+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n^2 n(n+1) = 2,$$

ved bruk av L'Hôpitals regel som over.

$\boxed{4}$ **a)** Vi skal summere rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$. Legg merke til at

$$n^2+7n+12 = (n+3)(n+4).$$

Dette gjør det mulig å delbrøksoppspalte leddene.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right).$$

Dette er en teleskoperende sum. Derfor er N-te delsum av rekken lik $\frac{1}{4} - \frac{1}{N+4}$. Lar vi N gå mot uendelig får vi verdien vi er ute etter, nemlig $\frac{1}{4}$.

b) Maclaurinrekken til e^x er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

som konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$. Spesielt konvergerer i det $x = 2$, der verdien blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$$

Det endelige svaret er e^2.

$\boxed{5}$ La $\varepsilon > 0$. Vi skal utpeke en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gjelder, der $f(x) = x^3 + 2$ og $x_0 = -1$, altså at

$$0 < |x+1| < \delta \Longrightarrow |(x^3+2) - ((-1)^3+2)| = |x^3+1| < \varepsilon.$$

Faktoriseringen $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ gir oss at vi like gjerne kan se på implikasjonen

$$0 < |x+1| < \delta \Longrightarrow |x+1||x^2 - x + 1| < \varepsilon.$$

Vi bemerker at funksjonen $x^2 - x + 1$ er synkende på intervallet $[-2, 0]$, som gir at

$$|x+1| < 1 \Longleftrightarrow -2 < x < 0 \Longrightarrow 1 < |x^2 - x + 1| < 7.$$

Følgelig er

$$|x^3+1| = |x+1||x^2-x+1| < 7|x+1| \tag{1}$$

for $|x+1| < 1$.

Vi velger

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{om } \varepsilon > 7, \\ \frac{\varepsilon}{7} & \text{ellers.} \end{cases}$$

Dette er nemlig passende. Om $\varepsilon > 7$ og $|x+1| < \delta = 1$ følger det at

$$|x^3+1| < 7|x+1| < 7\delta < 7 < \varepsilon.$$

Her tok vi nytte av (1). I det andre tilfellet, der $\varepsilon \leq 7$ og $|x+1| < \delta = \frac{\varepsilon}{7} \leq 1$, følger det igjen fra (1) at

$$|x^3+1| < 7|x+1| < 7\delta = 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon.$$

Begge tilfellene er tatt hånd om. Vi er ferdige.

$\boxed{6}$ Om vi substituerer $x = \sin u$ (og $\mathrm{d}x = \cos u \,\mathrm{d}u$) får vi

$$\int_0^1 x \arcsin x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} u \sin u \cos u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} u \sin 2u \,\mathrm{d}u$$

der andre likhetstegn oppnås som et resultat av en kjent trigonometrisk identitet. Delvis integrasjon er neste verktøy vi benytter oss av. La

$$\begin{aligned} u &= u \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}u \\ v &= -\frac{1}{2}\cos 2u \\ \mathrm{d}v &= \sin(2u) \end{aligned}$$

Da blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} u \sin 2u \,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{u}{2}\cos 2u\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-1}{2}\cos 2u \,\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{u}{2}\cos 2u\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\pi/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{2}(-1) + 0\right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Konklusjon: $\int_0^1 x \arcsin x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

$\boxed{7}$ **a)** Når vi løser initialverdiproblemet

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y &= 2xe^{-\sin x} \\ y(\pi) &= 0 \end{cases}$$

finner vi først den generelle løsningen av $y' + (\cos x)y = 2xe^{-\sin x}$. Her er $e^{\sin x}$ en integrerende faktor. Ganger vi med denne får vi

$$\begin{aligned} y'e^{\sin x} + (\cos x)ye^{\sin x} &= 2xe^{-\sin x}e^{\sin x} \\ \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\sin x}\right) &= 2x \\ \implies ye^{\sin x} &= \int 2x \,\mathrm{d}x = x^2 + C \\ \implies y &= e^{-\sin x}(x^2 + C). \end{aligned}$$

Dette er den generelle løsningen. Initialbetingelsen $y(\pi) = 0$ lar oss bestemme C.

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-\sin \pi}(\pi^2 + C) \\ \implies C &= -\pi^2. \end{aligned}$$

Løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = (x^2 - \pi^2)e^{-\sin x}.$$

b) Vi finner den generelle løsningen til $x^2y'+y = x^2e^{1/x}$ før vi tar initialbetingelsen $y(1) = 3e$ til betraktning. Vi deler begge sider på x^2 og får

$$y' + \frac{1}{x^2}y = e^{1/x}.$$

Nå er $e^{-1/x}$ en integrerende faktor.

$$\begin{aligned} y'e^{-1/x} + \frac{1}{x^2}ye^{-1/x} &= e^{1/x}e^{-1/x} = 1 \\ \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{-1/x}\right) &= 1 \\ \implies ye^{-1/x} &= x + C \\ \implies y &= (x + C)e^{1/x}. \end{aligned}$$

Initialbetingelsen $y(1) = 3e$ lar oss bestemme C.

$$\begin{aligned} 3e &= (1 + C)e^{1/1} = (1 + C)e \\ \implies C &= 2. \end{aligned}$$

Løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = (x + 2)e^{1/x}.$$

$\boxed{8}$ **a)** Integranden i det uegentlige integralet

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

kan delbrøksoppspaltes

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right)$$

Ved hjelp av substitusjoner (henholdsvis $x = u + 1$ og $x = u - 1$) får vi at

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Ingen av leddene på høyre side er definerte, så integralet divergerer.

b) Vi viser at det uegentlige integralet

$$I = \int_{1}^{\infty}\frac{\cos^2 x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

konvergerer. Det er tilstrekkelig å vise at verdien til I er begrenset ovenfra av et konvergent integral. For det første er $\cos^2 x \leq 1$, så

$$I \leq \int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Dessuten er $\frac{1}{x^4+1} < \frac{1}{x^4}$, som medfører at

$$I \leq \int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Vi har sett i forelesning at sistnevnte integral konvergerer.

$\boxed{9}$ Vi skal forsøke å tolke utrykket $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$ som en riemannsum. For å være mer presis, la $f(x)=1/x$. Denne er integrerbar på $[1,2]$. Se på partisjonen

$$\mathcal{P}_n=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}=\left\{1,1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n},\ldots,1+\frac{n-1}{n},2\right\}$$

Riemannintegralet $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}$ er lik $\ln(2)$. Vi kan oppnå dette som grenseverdien

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{i=1\\x_i\in\mathcal{P}_n}}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_i)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(1+\frac{i}{n}\right)-\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\right)f\left(1+\frac{i}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Vi har vist at $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln(2)$.