MA1101 Grunnkurs Analyse I Høst 2020

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 13

$\boxed{1}$ Her undersøker vi den deriverte og benytter skjæringssetningen. Polynomet

$$P(x) = x^5 - x + 1$$

har derivert lik

$$P'(x) = 5x^4 - 1$$

som medfører at

- $P'(x) > 0 \iff |x| > \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \simeq 0.669$
- $P'(x) < 0 \iff |x| < \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \simeq 0.669$
- $P'(x) = 0 \iff |x| = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \simeq 0.669$

Vi har at $P(-2) = -30$. Med tanke på at den deriverte er positiv på $(-\infty, -2]$, finnes det ingen røtter her.

Ettersom $P(-2) = -30$ og $P(-1) = 1$, følger det fra skjæringssetningen at det finnes en rot i intervallet $[-2, -1]$. Siden den deriverte er positiv på dette intervallet, finnes det nøyaktig én rot her.

Vi har et lokalt toppunkt i $x = -\frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}$, der funksjonsverdien er

$$-\left(\frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}\right)^5 + \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} + 1 \simeq 1.667.$$

Den deriverte er positiv for $-1 < x < -1/5^{\frac{1}{4}}$, så $f(1) > f(-1) = 1$ for alle x i dette intervallet. Her finnes det således ingen røtter.

Dessuten har vi et lokalt bunnpunkt i $x = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}$, der funksjonsverdien er

$$\left(\frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}\right)^5 - \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} + 1 \simeq 0.332.$$

Siden den deriverte er negativ for $-1/5^{\frac{1}{4}} < x < 1/5^{\frac{1}{4}}$, er $f(x) > 0.332$ for alle x i dette intervallet. Her finnes det altså ingen røtter.

Dessuten er den deriverte positiv for $x > \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}}$, som gjør det umulig å finne røtter i $[1/5^{\frac{1}{4}}, \infty)$.

Vi har undersøkt hele den réelle tallinjen, og vi fant kun én rot.

2 **a)** Vi delbrøksoppspalter leddene i rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

For det første er

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$$

som videre kan forenkles til

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).\end{aligned}$$

Vi skriver rekken som en differanse av to teleskoperende rekker,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

hvilket blir vårt endelige svar.

b) Maclaurinrekken til e^x er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

som konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$. Spesielt blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{-1}{2})^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3 **a)** Vi skriver om dette initialverdiproblemet til

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} &= \frac{1}{x} \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

slik at vi kan gange med den integrerende faktoren $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ og får

$$\begin{aligned} \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\\ \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{x} &= \frac{1}{x^2}\\ \implies \frac{y}{x} &= -\frac{1}{x} + C\\ \implies y &= Cx - 1.\end{aligned}$$

Dette er den generelle løsningen. Initialbetingelsen $y(1) = 1$ lar oss bestemme C.

$$y(1) = 1 = C \times 1 - 1 \Longrightarrow C = 2.$$

I konklusjon er løsningen på initialverdiproblemet

$$y = 2x - 1.$$

b) Vi løser initialverdiproblemet.

$$\begin{cases} y' &= 2xe^{-y} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Her er differensialligningen separabel.

$$\begin{aligned} y' &= 2xe^{-y} \\ \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}e^{y} &= 2x \\ \Longrightarrow \int e^{y}\,\mathrm{d}y &= \int 2x\,\mathrm{d}x \\ \Longrightarrow e^{y} &= x^2 + C \\ \Longrightarrow y &= \ln(x^2 + C). \end{aligned}$$

Dette er den generelle løsningen. Initialbetingelsen $y(0) = 0$ lar oss bestemme C.

$$y(0) = 0 = \ln(C) \Longrightarrow C = 1.$$

I konklusjon er løsningen på initialverdiproblemet

$$y = \ln(x^2 + 1).$$

$\boxed{4}$ **a)** Substitusjonen

$$\begin{aligned} x &= e^{t} \\ \mathrm{d}x &= e^{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

gir at

$$\int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = \int_1^\infty \frac{e^t \mathrm{d}t}{t}.$$

Med tanke på at $e^t > 1$ for $t \geq 1$ blir integralet på høyresiden større enn $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}$, som vi vet divergerer. Det opprinnelige integralet blir således divergent.

b) Vi gjenkjenner nevneren i integralet

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}}$$

som $2\sinh(x)$. Ved bruk at identiteten $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ har vi at

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sinh(x)} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\sinh^2(x)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cosh^2(x)\mathrm{d}x}{\sinh^2(x)} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Det opprinnelige integralet divergerer hvis og bare hvis $\int_0^1 \frac{\cosh^2(x)\mathrm{d}x}{\sinh^2(x)}$ divergerer. Substitusjonen

$$\begin{aligned}u &= \sinh(x) \\ \mathrm{d}u &= \cosh(x)\,\mathrm{d}x = (1+u^2)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

gir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\cosh^2(x)\mathrm{d}x}{\sinh^2(x)} &= \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{(1+u^2)^2 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}}{u^2} \\ &= \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{(1+u^2)\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \operatorname{arcsinh} 1 + \int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(der $\sinh(\operatorname{arcsinh} 1) = 1$). Dermed vil det opprinnelige integralet divergere hvis og bare hvis $\int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ divergerer. Vi hatt sett i forelesning at dette et tilfellet, som lar oss konkludere at integralet

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}}$$

divergerer.

5 Kompletthetsegenskapen for réelle tall sier at alle ikke-tomme øvrebegrensede delmengder av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke. Vi kan derfor si sikkert at både $\sup A$ og $\sup B$ eksisterer. Per definisjon er $\sup B$ lik det minste réelle tallet med egenskapen at $b \leq \sup B$ for alle $b \in B$. Vi har antatt at A er en delmengde av B, og følgelig er $a \leq \sup B$ for alle $a \in A$. Ettersom $\sup A$ er den minste øvre skranken til A, må $\sup A \leq \sup B$, hvilket skulle vises.