MA1101 Grunnkurs Analyse I Høst 2020

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 2

1

a) $(x_n)_n$ er begrenset nedenfra siden $1 \leq x_n$ for alle n. Det er ingen begrensning ovenfra: Gitt $M \in \mathbb{R}$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $N \geq M$. Da er $x_k > M$ for alle $k > N$. Siden $x_{n+1} \geq x_n$ for alle n er følgen voksende. Den kan ikke være avtakende fordi $x_{n+1} \not\leq x_n$ for alle n.

b) $(1, 1, 1, ...)$ er begrenset både ovenfra og nedenfra av 1. Siden følgen er konstant er det både sant at $x_{n+1} \geq x_n$ og $x_{n+1} \leq x_n$ for alle n. Dermed er følgen både voksende og avtakende.

c) Følgen er begrenset ovenfra av 1, siden $x_{2n+1} = 1$ for alle n, og $x_{2n} < 0 < 1$ for alle n. Den er ikke begrenset nedenfra. For alle $M \in \mathbb{R}$ finnes $N \in \mathbb{N}$ med $-N \leq M$. Da er $x_{2N+2} < -N < M$. Følgen er ikke voksende eller avtakende, siden generelt har vi ikke at $x_{n+1} \geq x_n$ eller $x_{n+1} \leq x_n$.

2

a) Vi har sett i forelesning at en voskende følge med en øvre skranke er konvergent. Vi viser at denne betingelsen er tilfredstilt for følgen vi er gitt.

Vi påstår først at $x_{n+1} \geq x_n$, og viser dette ved induksjon. Merk at $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$, så påstanden er sann for grunntilfellet $n = 1$. Vi antar så at $x_{n+1} > x_n$ for alle $n = 1, 2, \dots m-1$. Det gjenstår å vise at dette medfører at $x_{m+1} > x_m$. Merk at $x_m^2 = \sqrt{2 + x_{m-1}}^2 = 2 + x_{m-1}$. Dermed er

$$x_{m+1}^2 - x_m^2 = (2 + x_m) - (2 + x_{m-1}) = x_m - x_{m-1} > 0,$$

hvor siste ulikhet følger av induksjonshypotesen. Siden $x_n \geq 0$ for alle n vil $x_{m+1}^2 - x_m^2 > 0$ medføre at $x_{m+1} - x_m > 0$, altså at $x_{m+1} > x_m$. Derfor er følgen voksende.

Vi viser til sist at $x = 2$ er en øvre skranke, altså at $x_n \leq 2$ for alle $n \geq 1$. Også her kan vi tre frem ved induksjon. I grunntilfellet $n = 1$ er $x_1 = 1$, som helt klart er mindre enn 2. Om vi antar at $x_n \leq 2$ for en viss n følger det at

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2.$$

Her har vi brukt at funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ er *voksende*, altså at $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ dersom $x \leq y$. Ved induksjonsprinsippet konkluderer vi med at 2 er en øvre skranke av følgen $(x_n)_n$, og at denne følgen er konvergent.

b) Fra forrige deloppgave vet vi at $(x_n)_n$ konvergerer mot en verdi L, og at denne grenseverdien er mindre enn eller lik 2. Vi antar at $L < 2$, i håp om å nå en motsigelse. La $\varepsilon > 0$ være slik at $L < 2 - \varepsilon$. Ettersom $(x_n)_n$ konvergerer mot L, finnes det et naturlig tall N slik at

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

for enhver $n \geq N$. Med tanke på at $(x_n)_n$ er voksende, medfører dette at $L - \varepsilon < x_n \leq L$ for alle slike n. Spesielt er $x_{n+1} \leq L$. Men om vi regner ut x_{n+1} for en vilkårlig $n \geq N$ får vi at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{2 + x_n} \\ &> \sqrt{2 + L - \varepsilon} \\ &> \sqrt{2L} \\ &> L \end{aligned}$$

der siste ulikhet kommer av at $L < 2$. Konsekvensen at $x_{n+1} > L$ er ikke forenelig med at $x_{n+1} \leq L$.

Ved å anta at $L < 2$ nådde vi en motsigelse. Vi har altså vist at $L = 2$.

$\boxed{3}$ Vi ser at følgen $(|x_n|)_n = (\frac{1}{n})_n$ er avtakende. Vi påstår at $\inf_n x_n = -1$. Har at $x_1 = -1$, og siden $(|x_n|)_n$ er avtakende, er $x_n \geq -1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er $L = -1$ en nedre skranke. Det er også største nedre skranke: La $\varepsilon > 0$. Da er $-1 + \varepsilon > -1 = x_1$, så $-1 + \varepsilon$ kan ikke være en nedre skranke for noen $\varepsilon > 0$. Det følger at $\inf_n x_n = -1$.

Videre påstår vi at $\sup_n x_n = \frac{1}{2}$. Ser at $x_2 = \frac{1}{2}$ og $x_1 = -1 < \frac{1}{2}$. Siden $(|x_n|)_n$ er avtakende er $x_n \leq \frac{1}{2}$ for alle n. Dermed er $\frac{1}{2}$ en øvre skranke. Det er også minste øvre skranke: La $\varepsilon > 0$. Da er $\frac{1}{2} - \varepsilon$ ikke en øvre skranke, siden $x_2 = \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \varepsilon$. Det følger av $\sup_n x_n = \frac{1}{2}$.

Til slutt hevder vi at $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. La $\varepsilon > 0$. Vi må finne $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k \geq N$ er $|x_k - 0| < \varepsilon$, altså $|x_k| < \varepsilon$. Finn N slik at $\frac{1}{N} < \varepsilon$, altså $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Da er $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ for $k \geq N$. For en slik k har vi da

$$|x_k| = \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \left|\frac{1}{k}\right| < \varepsilon,$$

så det følger at $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\boxed{4}$ I håp om å utlede en motsigelse antar vi at det finnes et minste tall x i intervallet $A = (0, 1)$ (altså at $x < y$ for alle $y \in (0, 1)$). Verdien $x/2$ ligger også i dette intervallet, men er mindre enn x. Det er derfor absurd at x er et minimum for denne mengden. En slik x finnes dermed ikke.

$\boxed{5}$ Om vi trekker n^2 og n^3 ut av henholdsvis telleren og nevneren får vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \cos(n^2)}{n^3 + \sqrt{n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} \frac{1 + \frac{\cos(n^2)}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{n^3} + \frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{\cos(n^2)}{n^2}}{1 + n^{-5/2} + n^{-3}}.$$

Følgen $(1/n)_n$ konvergerer mot 0. Dersom følgen

$$\left(\frac{1 + \frac{\cos(n^2)}{n^2}}{1 + n^{-5/2} + n^{-3}}\right)_n$$

konvergerer mot et visst reelt tall L, følger det at (se infoboksen på s. 504 i læreboken)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1+\frac{\cos(n^2)}{n^2}}{1+n^{-5/2}+n^{-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\cos(n^2)}{n^2}}{1+n^{-5/2}+n^{-3}} = 0 \cdot L = 0.$$

Med andre ord er vi i mål om vi kan vise at grenseverdien

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\cos(n^2)}{n^2}}{1+n^{-5/2}+n^{-3}}$$

eksisterer. Lar vi n gå mot uendelig vil uttrykkene over og under brøkstreken gå mot 1. Derfor er

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\cos(n^2)}{n^2}}{1+n^{-5/2}+n^{-3}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos(n^2)}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+n^{-5/2}+n^{-3}\right)} = \frac{1}{1} = 1,$$

som viser det vi skulle vise.

$\boxed{\text{1.5:31}}$ Vi beviser utsagnet ved motsigelse. La $(x_n)_n$ være en følge, og anta at $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ og $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, med $L \neq M$. La $\varepsilon = \frac{|L-M|}{3} > 0$. Siden $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ finnes det $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k \geq N_1$ er $|x_k - L| < \frac{|L-M|}{3}$. Tilsvarende, siden $\lim_{n\to\infty} x_n = M$, finnes det $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at for alle $k \geq N_2$ er $|x_k - M| < \frac{|L-M|}{3}$. La $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ved trekantulikheten har vi da for $k \geq N$

$$\begin{aligned} |L-M| &= |L - x_k + x_k - M| \leq |L - x_k| + |x_k - M| = |x_k - L| + |x_k - M| \\ &< \frac{|L-M|}{3} + \frac{|L-M|}{3} = \frac{2|L-M|}{3} < |L-M|, \end{aligned}$$

som er en motsigelse. Det følger at $L = M$.