MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2020

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

1.2:14,22,30

a) Ved tredje kvadratsetning/konjugatsetningen får vi

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x-2}=\frac{-2}{-2-2}=\frac{1}{2}$$

b) Vi ser på de ensidige grensene. For $x<2$ er $|x-2|=-(x-2)$, så vi får

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1,$$

mens for $x>2$ er $|x-2|=x-2$, så vi får

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1.$$

De ensidige grensene er ikke like, så grenseverdien eksisterer ikke.

c) Vi faktoriserer telleren $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ (bruk gjerne polynomdivisjon for å gjøre dette). Da får vi

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=(-1)^2-(-1)+1=3.$$

2

a) La $\varepsilon>0$. Vi må vise at det finnes $\delta>0$ slik at for $|x-2|<\delta$ er $|(5-2x)-1|<\varepsilon$. Først skriver vi om

$$|(5-2x)-1|=|4-2x|=2|2-x|=2|x-2|.$$

La nå $\delta<\varepsilon/2$. For $|x-2|<\delta$ har vi da

$$|(5-2x)-1|=2|x-2|<2\frac{\epsilon}{2}=\varepsilon.$$

Det følger at $\lim_{x\to 2}(5-2x)=1$.

b) La $\varepsilon>0$. Vi må vise at det finnes en $\delta>0$ slik at for $|x-1|<\delta$ er $|x^2-1|<\varepsilon$. Først skriver vi om

$$|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|=|x-1||x+1|.$$

Vi vil at uttrykket over skal bli mindre enn ε. Vi kan få $|x-1|$ så liten som mulig ved å velge en passende δ, men vi trenger å sikre at faktoren $|x+1|$ ikke blir for stor. Dersom vi først antar at $\delta\le 1$ og krever at $|x-1|<\delta$, har vi at

$$|x-1|<1 \implies 0<x<2 \implies 1<x+1<3 \implies |x+1|<3.$$

Dermed har vi at

$$|x^2 - 1| = |x-1||x+1| < 3|x-1| \text{ for } |x-1| < \delta \leq 1.$$

Ved å velge $\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$, får vi at

$$|x^2 - 1| < 3|x-1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \text{ for } |x-1| < \delta$$

Det følger at $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$.

3 a) Siden f er kontinuerlig på $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$, trenger vi bare sjekke om f er kontinuerlig i 0. For at dette skal være tilfellet, trenger vi $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

De ensidige grenseverdiene er like i $x = 0$, og er lik funksjonsverdien i $x = 0$, så vi har kontinuitet i 0. Det følger at f definerer en kontinuerlig funksjon.

b) Denne f definerer ikke engang en funksjon.

1.2:78 Både $g(x) = x$ og $h(x) = \sin x$ har definisjonsmengde lik $\mathbb{R}$, mens $k(x) = \frac{1}{x}$ har definisjonsmengde $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Komposisjonen av disse funksjonene som utgjør $f : x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ har derfor definisjonsmengden $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vi skal vise at $\lim_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x})$ eksisterer. Vi påstår grenseverdien er lik 0. La $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at for $|x - 0| = |x| < \delta$ er $|x \sin(\frac{1}{x}) - 0| = |x \sin(\frac{1}{x})| < \varepsilon$. Merk at $|\sin(y)| \leq 1$ for alle y. Derfor er $|x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$. La nå $\delta < \varepsilon$. For $|x| < \delta$ har vi da

$$|x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| < \delta < \varepsilon.$$

Det følger at $\lim_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

Vi kan nå definere funksjonen $\tilde{f}$ gitt ved

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Denne funksjonen er kontinuerlig. Kontinuitet for $x \neq 0$ følger av kontinuitet av g, h og k ovenfor for $x \neq 0$. Kontinuitet i $x = 0$ er det samme som at grenseverdien eksisterer og er lik hva vi har definert funksjonsverdien i $x = 0$ til å være. Disse stemmer overens, så $\tilde{f}$ er en kontinuerlig funksjon.

1.2.27,41,58,61 a) Vi bruker tredje kvadratsetning/konjugatsetningen i nevneren og får

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{t^2 + 3t}{(t+2)^2 - (t-2)^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{t(t+3)}{((t+2)+(t-2)) \cdot ((t+2)-(t-2))} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t(t+3)}{2t \cdot 4} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t+3}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

b) Her ganger vi med $1 = \left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$ og får

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

c) Siden vi ser på $x \to a^+$ betrakter vi kun $x > a$. For $x > a$ er $|x-a| = x-a$. Merk at $a > 0$. Da blir (den ensidige) grenseverdien

$$\lim_{x\to a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{x-a}{(x+a)(x-a)} = \lim_{x\to a^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{2a}.$$

d) Siden vi ser på $x \to -1^-$ trenger vi kun betrakte $f(x)$ for $x < -1$. Da er $f(x) = x-1$. Dermed er

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x-1) = -1-1 = -2.$$

$\boxed{1.2.55}$ For $x \in (0,1)$ er $x^3 < x$, så $x^3 - x < 0$ og uttrykket $\sqrt{x^3-x}$ er ikke reelt. Dermed finnes det ikke noen $b \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = \sqrt{x^3-x}$ er definert på intervallet $(b,0)$, som kreves i definisjonen av ensidige grenseverdier.

$\boxed{1.3.1,12}$ a) La $\varepsilon > 0$. Vi vil vise at det eksisterer et tall $N > 0$, slik at når $x > N$, så vil $|\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Vi skriver om

$$\left|\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x}{2(2x-3)} - \frac{2x-3}{2(2x-3)}\right| = \left|\frac{3}{2(2x-3)}\right|.$$

Dersom $x > 3/2$ har vi at

$$\frac{3}{2(2x-3)} < \varepsilon$$

så sant

$$x > \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{3}{2}.$$

Derfor, om $N = \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{3}{2}$ har vi at når $x > N$, så vil

$$\left|\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2}\right| < \left|\frac{N}{2N-3} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Dette viser at $lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-3} = \frac{1}{2}$.

b) La $N \in \mathbb{R}$, og anta uten tap av generalitet at $N > 0$. Vi må vise at det finnes en $\delta > 0$ slik at for $|x-3| < \delta$ er $\frac{1}{(3-x)^2} > N$. Velg $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}}$. Da er $\frac{1}{\delta} > \sqrt{N}$. For $|x-3| < \delta$ er da

$$\frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{|x-3|^2} > \frac{1}{\delta^2} > \sqrt{N}^2 = N$$

som viser $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(3-x)^2} = \infty$.

$\boxed{\text{1.3.9,25,30}}$ a) Merk at når vi tar x innenfor rottegnet i utregningen under må vi justere for et minustegn, siden vi ser på $x \to -\infty$ og derfor kan anta at $x < 0$. Det vil si, vi har at $\sqrt{x^2} = |x|$, men for $x < 0$ er jo $|x| = -x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}} \cdot \frac{(-\frac{1}{x})}{(-\frac{1}{x})} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{(-x)} - \frac{1}{(-x)}}{\sqrt{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+0}{\sqrt{3+0+0}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^3} + \frac{x^3}{x^3} + \frac{x^5}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1 + x^2}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 1} \\
&= \frac{0 + 1 + \lim_{x\to\infty} x^2}{0+0+1} \\
&= 1 + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.
\end{aligned}$$

c) Vi kan ikke evaluere dette uttrykket direkte, ettersom det er av formen "$\infty - \infty$". For å få uttrykket på en form vi kan jobbe med, multipliserer vi med den konjugerte. Dette innebærer å bruke tredje kvadratsetning/konjugatsetningen på følgende vis

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})\cdot\frac{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}^2-\sqrt{x^2-2x}^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{4}{2}=2.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{1.4.29}}$ Siden f er en kontinuerlig funksjon kan vi bruke skjæringssetningen (intermediate value theorem). Vi har at $f(0)=0^3+0-1=-1<0$ og $f(1)=1^3+1-1=1>0$. Det følger da av skjæringssetningen at det finnes (minst) et punkt $c\in[0,1]$ med $f(c)$, altså et nullpunkt for f.

$\boxed{\text{1.4.17}}$ Funksjonen $g(x)=x^2$ er kontinuerlig for $x\le 2$ og $h(x)=k-x^2$ er kontinuerlig for $x>2$ for alle $k\in\mathbb{R}$. For kontinuitet i $x=2$ trenger vi

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)=\lim_{x\to 2^+}f(x)$$

Vi har

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}x^2=2^2=4=f(2)$$

For kontinuitet trenger vi da $\lim_{x\to 2^+}f(x)=4$. Med andre ord

$$4=\lim_{x\to 2^+}(k-x^2)=k-2^2=k-4\iff k=8$$

Dermed er f kontinuerlig hvis $k=8$. For alle andre verdier av k vil f være venstrekontinuerlig, siden vi da har at $f(2)=\lim_{x\to 2^-}f(x)$, men ikke høyrekontinuerlig, siden $f(2)\neq\lim_{x\to 2^+}f(x)$.