Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

$\boxed{\text{2.1.7,9}}$ a) La $f(x) = \sqrt{x+1}$. For $x_0 = 3$ er $f(x_0) = \sqrt{3+1} = 2$ Vi finner først tangenten i $(3,2)$. Vi har

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h+1}-\sqrt{3+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}^2-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Dermed er tangenten i $(x_0, f(x_0)) = (3,2)$ lik

$$y = k(x-x_0) + f(x_0) = \frac{1}{4}(x-3)+2 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

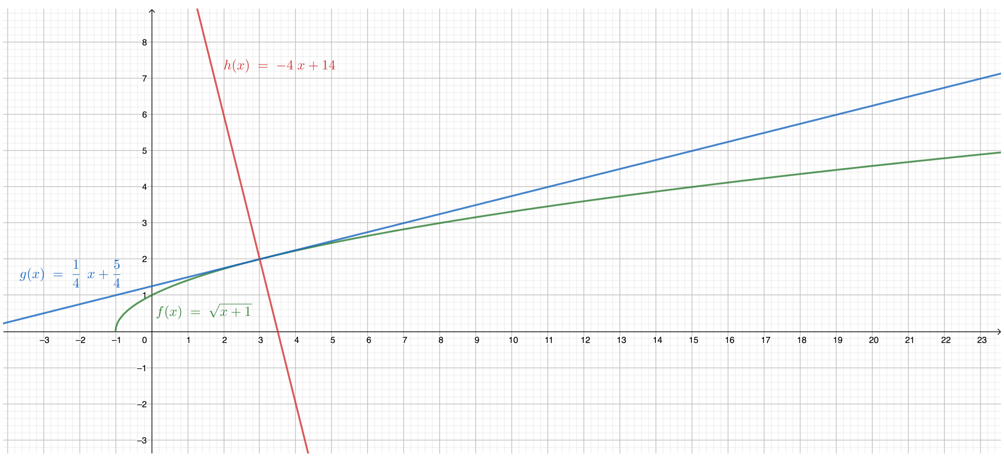
Vi finner så normalen i punktet $(3,2)$. Vi vet at stigningstallet k' er gitt ved

$$k' = \frac{-1}{k} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$$

Da er normalen gitt ved

$$y = k'(x-x_0) + f(x_0) = -4(x-3)+2 = -4x+14$$

Figur:



b) La $f(x) = \frac{2x}{x+2}$. For $x_0 = 2$ er $f(x_0) = \frac{2\cdot 2}{2+2} = 1$. Vi finner først tangenten i $(2, 1)$. Vi har

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(2+h)}{(2+h)+2} - \frac{2\cdot 2}{2+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{4+2h}{4+h} - 1\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{4+2h}{4+h} - \frac{4+h}{4+h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{4+h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{4+h} = \frac{1}{4}$$

Da er tangenten i $(2, 1)$ gitt ved

$$y = k(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{4}(x-2) + 1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

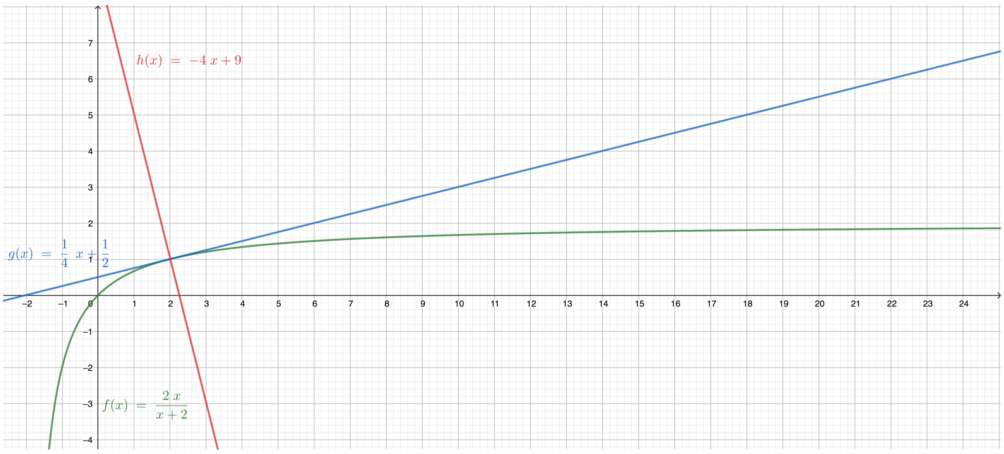
Vi finner så normalen i $(2, 1)$. Stigningstallet k' er gitt ved

$$k' = \frac{-1}{k} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$$

Dermed er likningen for normalen i $(2, 1)$ gitt ved

$$y = k'(x - x_0) + f(x_0) = -4(x-2) + 1 = -4x + 9$$

Figur:



$\boxed{\text{2.2.13,15,24}}$ a) Bruker definisjonen av den deriverte

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^3 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Da er definisjonsmengden $D_f = \mathbb{R}$.

b) Bruker definisjonen av den deriverte

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-(x+h)}{2+(x+h)} - -\frac{2-x}{2+x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2-x-h}{2+x+h} - \frac{2-x}{2+x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{(2-x-h)(2+x)}{(2+x+h)(2+x)} - \frac{(2-x)(2+x+h)}{(2+x+h)(2+x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{4-2x-2h+2x-x^2-xh-(4+2x+2h-2x-x^2-xh)}{(2+x)(2+x+h)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(-4h)}{(2+x)(2+x+h)} = -4\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{(2+x)(2+x+h)} = -\frac{4}{(2+x)^2}
\end{aligned}
$$

Da er definisjonsmengden $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

c) Bruker definisjonen av den deriverte

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{h(t+h)-h(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(t+h)^2-3}{(t+h)^2+3} - \frac{t^2-3}{t^2+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{(t+h)^2-3}{(t+h)^2+3} - \frac{t^2-3}{t^2+3}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{((t+h)^2-3)(t^2+3)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} - \frac{(t^2-3)((t+h)^2-3)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{(t+h)^2t^2+3(t+h)^2-3t^2-3^2-(t^2(t+h)^2-3(t+h)^2+3t^2-3^2}{((t+h)^2+3)(t^2+3)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{6(t+h)^2-6t^2}{((t+h)^2+3)(t^2+3)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{6}{h}\left(\frac{t^2+2th+h^2-t^2}{((t+h)^2+3)(t^2+3)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{6}{h}\left(\frac{2th+h^2}{((t+h)^2+3)(t^2+3)}\right) = 6\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2t+h}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{12t}{(t^2+3)^2}
\end{aligned}
$$

Da er definisjonsmengden $D_h = \mathbb{R}$.

2.2.47 Vi finner først de mulige tangeringspunktene som gir tangenter som går gjennom punktet $(1,-3)$. La $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0^2)$ være et slikt tangeringspunkt. Stigningstallet til tangenten i punktet er lik $f'(x_0) = 2x_0$ siden $f(x) = x^2$ er kontinuerlig deriverbar. Vi får da en tangent $y = 2x_0(x-x_0)+x_0^2$. For $x = 1$ skal denne tangenten gi verdien $y = -3$. Dette gir likningen

$$2x_0(1-x_0)+x_0^2 = -3 \iff -x_0^2+2x_0+3 = 0$$

Vi faktoriserer (bruk gjerne abc-formelen) og får

$$-(x_0-3)(x_0+1) = 0$$

Så de to mulige tangeringspunktene er $(3,3^2) = (3,9)$ og $(-1,(-1)^2) = (-1,1)$. Hvis tangeringspunktet er $(x_0, x_0^2) = (3,9)$ får vi tangenten

$$y = 2x_0(x-x_0)+x_0^2 = 2\cdot 3(x-3)+9 = 6x-9$$

og hvis tangeringspunktet er $(x_0, x_0^2) = (-1, 1)$ er tangenten

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2 \cdot (-1)(x - (-1)) + 1 = -2(x+1) + 1 = -2x - 1$$

$\boxed{\text{2.2.53}}$ La $f(x) = x^{1/3}$. Merk at vi kan skrive om hintet i oppgaven til $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$. Ved å bruke dette med $a = (x+h)^{1/3}$ og $b = x^{1/3}$ får vi da ved definisjonen av den deriverte

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{1/3} - x^{1/3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{((x+h)^{1/3})^3 - (x^{1/3})^3}{((x+h)^{1/3})^2 + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + (x^{1/3})^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x + h - x}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\
&= \frac{1}{3x^{2/3}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2.3.8,17,31}}$ a)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(3\sqrt[3]{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t^3}}) &= \frac{d}{dt}(3t^{2/3} - 2t^{-3/2}) \\
&= 3 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot (-\frac{3}{2}) t^{-\frac{3}{2}-1} \\
&= 2t^{-\frac{1}{3}} + 3t^{-\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1 - 4x^2}{x^3}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{4}{x}\right) \\
&= (-3) \cdot \frac{1}{x^4} - (-1)\frac{4}{x^2} \\
&= \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^4} = \frac{4x^2 - 3}{x^4}
\end{aligned}$$

c) La oss først skrive om uttrykket litt

$$\frac{x}{2x + \frac{1}{3x+1}} = \frac{3x+1}{2x + \frac{1}{3x+1}} \cdot \frac{3x+1}{3x+1} = \frac{x(3x+1)}{2x(3x+1)+1} = \frac{3x^2 + x}{6x^2 + 2x + 1}$$

Kvotientregelen gir nå

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+x}{6x^2+2x+1}\right) &= \frac{(3x^2+x)'(6x^2+2x+1)-(3x^2+x)(6x^2+2x+1)'}{(6x^2+2x+1)^2}\\ &= \frac{(6x+1)(6x^2+2x+1)-(3x^2+x)(12x+2)}{(6x^2+2x+1)^2}\\ &= \frac{36x^3+12x^2+6x+6x^2+2x+1-(36x^3+6x^2+12x^2+2x)}{(6x^2+2x+1)^2}\\ &= \frac{6x+1}{(6x^2+2x+1)^2}\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2x+\frac{1}{3x+1}}\right)\bigg|_{x=1} &= \frac{6x+1}{(6x^2+2x+1)^2}\bigg|_{x=1}\\ &= \frac{6\cdot 1+1}{(6\cdot 1^2+2\cdot 1+1)^2}\\ &= \frac{7}{9^2}=\frac{7}{81}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2.4.3,12,28,30}}$ a) Kjernen er $4-x^2$ som har derivert lik $-2x$. Dermed får vi ved kjerneregelen

$$\frac{d}{dx}(4-x^2)^{10} = 10(4-x^2)^9\cdot\frac{d}{dx}(4-x^2) = 10(4-x^2)^9\cdot(-2x) = -20x(4-x^2)^9$$

Dette gjelder alle $x\in\mathbb{R}$.

b) Vi trenger å vite $\frac{d}{dx}(2+|x|^3)$. Merk at

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

for $x\neq 0$. Den deriverte er ikke definert i $x=0$. Funksjonen til høyre skriver vi som $sgn(x)$. Ved kjerneregelen får vi da

$$\frac{d}{dx}(2+|x|^3) = 0+3|x|^2sgn(x) = 3|x|^2sgn(x)$$

Ved kjerneregelen nok en gang får vi da

$$\frac{d}{dx}(2+|x|^3)^{1/3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2+|x|^3)^{2/3}}\cdot 3|x|^2sgn(x) = \frac{|x|^2sgn(x)}{(2+|x|^3)^{2/3}}$$

Dette gjelder alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vi sjekker $x=0$ separat. Merk at $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$. Dette gir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(2+|h|^3)^{1/3}-2^{1/3}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{((2+|h|^3)^{1/3})^3-(2^{1/3})^3}{((2+|h|^3)^{1/3})^2+(2+|h|^3)^{1/3}\cdot 2^{1/3}+(2^{1/3})^2}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{2+|h|^3-2}{(2+|h|^3)^{2/3}+(2+|h|^3)^{1/3}\cdot 2^{1/3}+2^{2/3}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{|h|^3}{(2+|h|^3)^{2/3}+(2+|h|^3)^{1/3}\cdot 2^{1/3}+2^{2/3}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\frac{d}{dx}(2+|x|^3)^{1/3} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{|x|^2 sgn(x)}{(2+|x|^3)^{2/3}} & x \neq 0 \end{cases}$$

c) Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(2f(3f(x)))) &= f'(2f(3f(x))) \cdot \frac{d}{dx}(2f(3f(x))) \\ &= f'(2f(3f(x))) \cdot 2f'(3f(x)) \cdot \frac{d}{dx}(3f(x)) \\ &= f'(2f(3f(x))) \cdot 2f'(3f(x)) \cdot 3f'(x) \\ &= 6f'(2f(3f(x))) \cdot f'(3f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Dette gjelder alle $x \in D$, hvor D er gitt ved

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x \in Dom f', 3f(x) \in Dom f', \text{and } 2f(3f(x)) \in Dom f'\}$$

d) Merk først at

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2-1}) = \frac{d}{dx}(x^2-1)^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(x^2-1)^{-1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

ved kjerneregelen. Kvotientregelen gir nå

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right) &= \frac{\sqrt{x^2-1}'(x^2+1) - \sqrt{x^2-1}(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x^2+1) - \sqrt{x^2-1}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x^2+1) - \sqrt{x^2-1}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x^3+x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{-x^3+3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right)\bigg|_{x=-2} &= \frac{-x^3+3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2-1}}\bigg|_{x=-2} \\ &= \frac{-(-2)^3+3(-2)}{((-2)^2+1)^2\sqrt{2^2-1}} \\ &= \frac{8-6}{5^2\sqrt{4-1}} = \frac{2}{25\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$\boxed{2.5.57}$ a) Vi vet at $\cos h = 1 - \sin^2(\frac{h}{2})$, så vi får

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2(\frac{h}{2}))}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{h}{2})}{h^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{4\sin^2(\frac{h}{2})}{h^2} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2} \end{aligned}$$

La nå $\theta = \frac{h}{2}$ og merk at når $h \to 0$ vil $\theta \to 0$. Da får vi

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

hvor vi har brukt den kjente grenseverdien $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
Merk: Oppgaven kan også løses ved å multiplisere med $1 + \cos h$ i teller og nevner i aller første utregning ovenfor, og dette gjør oppgaven mye lettere.

b) Vi vet at $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Dermed er

$$\frac{\pi - \pi\cos^2(x)}{x^2} = \frac{\pi - \pi(1-\sin^2(x))}{x^2} = \frac{\pi\sin^2(x)}{x^2}$$

og vi får umiddelbart at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin^2(x)}{x^2} = \pi\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \pi\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \pi\cdot 1^2 = \pi$$

Siden cos er en kontinuerlig funksjon får vi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi - \pi\cos^2(x)}{x^2}\right) &= \cos\left(\lim_{x\to 0}\frac{\pi - \pi\cos^2(x)}{x^2}\right)\\ &= \cos\left(\pi\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)\\ &= \cos(\pi\cdot 1) = \cos(\pi) = -1\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Ettersom $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$, så det følger at $\lim_{x\to 0} x^2\sin(\frac{1}{x}) = 0$. Men for $x \in (0,\infty)$ er

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2\sin(\frac{1}{x})) = 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2\cdot\frac{d}{dx}(\sin(\frac{1}{x}))\\ &= 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2\cdot(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})\end{aligned}$$

så grensen av $f'(x)$ når $x \to 0^+$ finnes ikke siden $\lim_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})$ ikke finnes (men $\lim_{x\to 0} 2x\sin(\frac{1}{x}) = 0$).