MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2020

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 5

$\boxed{2.6.17}$ a)

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{a+bx} = \frac{d^2}{dx^2}\frac{d}{dx}\frac{1}{a+bx} &= \frac{d^2}{dx^2}\frac{-b}{(a+bx)^2} \\ &= \frac{d}{dx}\frac{2b^2}{(a+bx)^3} \\ &= \frac{-6b^3}{(a+bx)^4}\end{aligned}$$

b) Ut i fra utregningene i a), foreslår vi en formel for den n-te deriverte av $y(x)$:

$$\frac{d^n y}{dx^n}(x) = (-1)^n \frac{n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}$$

der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$.

Vi vil vise ved induksjon at formelen stemmer. Vi ser at vi allerede har vist at formelen stemmer for $0 < n \leq 3$, og antar at den også stemmer for $n = m-1$, altså

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}(x) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!b^{m-1}}{(a+bx)^m}.$$

Vi viser formelen for $n = m$:

$$\begin{aligned}\frac{d^m y}{dx^m}(x) &= \frac{d}{dx}(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!b^{m-1}}{(a+bx)^m} \\ &= (-1)^{m-1}(m-1)!b^{m-1}\frac{d}{dx}\frac{1}{(a+bx)^m} \\ &= (-1)^{m-1}(m-1)!b^{m-1}\frac{-mb}{(a+bx)^{m+1}} \\ &= -(-1)^{m-1}m(m-1)!b \cdot b^{m-1}\frac{1}{(a+bx)^{m+1}} \\ &= (-1)^m \frac{m!b^m}{(a+bx)^{m+1}}\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise. Vi kan dermed konkludere med at formelen stemmer for alle $n > 0$.

$\boxed{2.8.5}$ $\tan x$ er kontinuerlig deriverbar i $(0, \frac{\pi}{2})$ med $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Sekantsetningen/mellomverdisetningen (the mean value theorem) gir at det finnes $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ slik at

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = \frac{d}{dx}\tan x\Big|_{x=c} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

Siden $\cos c \in (0,1)$ for $c \in (0,\pi/2)$ er $\frac{1}{\cos^2 c} > 1$. Dermed konkluderer vi med at

$$\tan x = \frac{x}{\cos^2 c} > x$$

for $x \in (0,\pi/2)$.

3 $f(x) = x^2$ har $f(0) = 0 = f'(0)$ men er strengt voksende på $[0,\infty)$ siden $y > x$ medfører $y^2 > x^2$.

2.8.29 Darbouxs teorem sier: En funksjon som er den deriverte av en annen funksjon og er definert på et intervall, oppfyller mellomverdisetningen/skjæringssetningen (the intermediate value theorem). Med andre ord, hvis f' er definert på et intervall $[a,b]$ og er den deriverte av en funksjon f, og $k \in \mathbb{R}$ ligger mellom $f'(a)$ og $f'(b)$, så finnes $c \in [a,b]$ med $f'(c) = k$.

La oss vise dette. La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en funksjon og anta f er deriverbar på et intervall som inneholder a og b. Anta videre k er en verdi mellom $f'(a)$ og $f'(b)$. Vi må vise at det finnes $c \in [a,b]$ med $f'(c) = k$. Vi vil anta at $f'(a) < k < f'(b)$. Det motsatte tilfellet, $f'(b) < f'(a)$, dekkes helt tilsvarende (prøv selv), og tilfellet $f'(a) = f'(b)$ er trivielt.

Definer $g(x) = f(x) - kx$. Siden f er deriverbar er f kontinuerlig, og det følger at g er kontinuerlig. Ved ekstremalverdisetningen har g minimumspunkt på $[a,b]$. Vi har $g'(a) = f'(a) - k < 0$, så g kan ikke ha minimumspunkt i $x = a$. (Hvis dette hadde vært tilfelle ville $\frac{g(t)-g(a)}{t-a} \geq 0$ for alle $t \in [a,b]$, og dermed $g'(a) \geq 0$, en motsigelse). Tilsvarende kan ikke g oppnå minimumsverdi i $x = b$ siden $g'(b) = f'(b) - k > 0$.

Dermed må g oppnå minimumsverdi i et indre punkt $c \in (a,b)$, og det følger at $g'(c) = 0$, eller med andre ord $f'(c) - k = 0 \Leftrightarrow f'(c) = k$.

Hvorfor er dette overraskende? Resultatet sier at f' tilfredsstiller middelverdiegenskapen til tross for at vi ikke vet at f' er kontinuerlig. Tidligere har vi sett på middelverdisetningen/skjæringssetningen, og for å bruke denne trenger vi at den aktuelle funksjonen er kontinuerlig.

2.9.10 Vi skal finne tangenten $y = a(x - x_0) + y_0$, hvor $x_0 = -1$ og $y_0 = 2$, og hvor a er $\frac{\partial y}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)}$. La oss først sjekke at $(-1,2)$ tilfredsstiller likningen

$$(-1)^2 \cdot 2^3 - (-1)^3 \cdot 2^2 = 8 + 4 = 12$$

som stemmer. Videre har vi at

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3 - x^3y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(12) = 0$$

som gir

$$\begin{aligned}
&2xy^3 + x^2 \cdot 3y^2\frac{\partial y}{\partial x} - 3x^2y^2 - x^3 \cdot 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\
\iff &(3x^2y^2 - 2x^3y)\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2xy^3 \\
\implies &\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 2x^3y}
\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{(-1,2)} = \frac{3\cdot(-1)^2\cdot 2^2 - 2\cdot(-1)\cdot 2^3}{3\cdot(-1)^2\cdot 2^2 - 2\cdot(-1)^3\cdot 2} = \frac{12+16}{12+4} = \frac{7}{4}$$

Da er tangenten gitt ved

$$y = \frac{7}{4}(x-(-1)) + 2 = \frac{7}{4}x + \frac{7}{4} + 2 = \frac{7}{4}x + \frac{15}{4}$$

6 a)

$$1+\tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

hvor vi har brukt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

b) Vi vet at $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + z^2$, så vi får

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dx}} = \frac{1}{1+z^2}$$

4.3.3,34 a) Dette er et 0/0-uttrykk, så vi bruker L'Hôpitals regel

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)} = \frac{a}{b}\cdot\frac{\cos(a\cdot 0)}{\cos(b\cdot 0)} = \frac{a}{b}.$$

b) Dette er også et 0/0-uttrykk, så vi bruker L'Hôpitals regel igjen

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{\arctan(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1/\sqrt{1-x^2}}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) Her har vi nok en gang et 0/0-uttrykk, så L'Hôpitals regel blir nok en gang nyttig.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(x)}{\tan(x)-x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}-1}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin(x)\cos^3(x)}{1-\cos^2(x)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin(x)\cos^3(x)}{\sin^2(x)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos^3(x)}{\sin(x)} = +\infty\end{aligned}$$

d) Under antakelsen om at f er to ganger deriverbar er f i hvert fall kontinuerlig. Dermed er uttrykket er 0/0-uttrykk. Vi bruker L'Hôpital med hensyn på h (som gjør at $f(x)$ forsvinner siden det ikke avhenger av h)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

hvor fortegnskiftet i siste ledd er på grunn av at vi deriverer kjernen $x - h$ med hensyn på h. Merk nå at

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

men også at

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h}$$

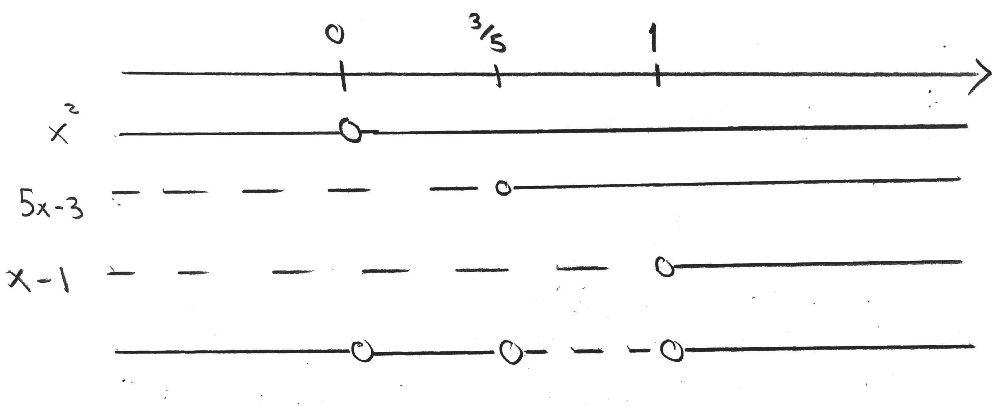
Dermed kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} &= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) + f'(x) - f'(x-h)}{h} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(f''(x) + f''(x)) = f''(x)
\end{aligned}$$

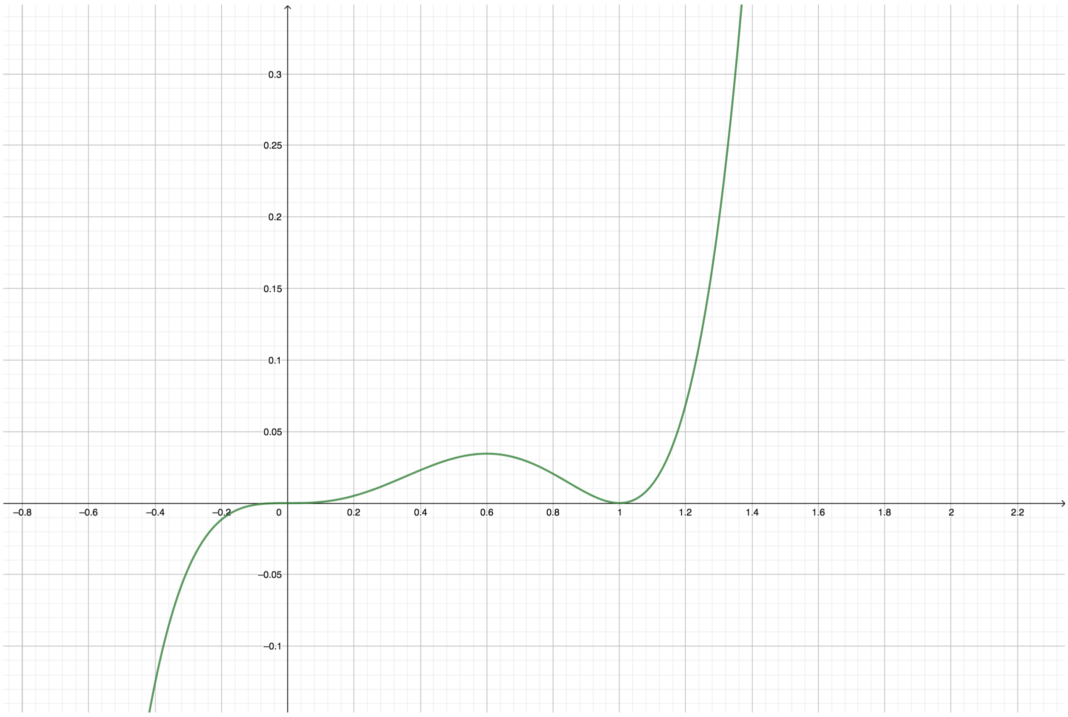
$\boxed{\text{4.4.21}}$ Vi har ikke endepunkter til noe intervall, så kritiske punkter forekommer der $f'(x) = 0$ eller f' ikke eksisterer. Vi har at

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3(x-1)^2) = 3x^2(x-1)^2 + x^3(2(x-1)) = x^2(x-1)(3(x-1)+2x) = x^2(x-1)(5x-3)$$

Vi ser da at $f'(x)$ eksisterer for alle $x \in \mathbb{R}$, så kritiske punkter forekommer der $f'(x) = 0$. Har følgende fortegnslinje



De kritiske punktene er da $(0, f(0)) = (0, 0^3(0-1)^2) = (0, 0)$, $(3/5, f(3/5)) = (3/5, (3/5)^3(3/5-1)^2) = (3/5, 108/3125)$, og $(1, f(1)) = (1, 1^3(1-1)^2) = (1, 0)$. Siden f' ikke skifter fortegn i $x = 0$ er $(0, f(0))$ et terrasepunkt. Siden f' skifter fortegn fra positivt til negativt i $x = 3/5$ er $(3/5, f(3/5))$ et toppunkt. Siden f' skifter fortegn fra negativt til positivt i $x = 1$ er $(1, f(1))$ et bunnpunkt. Vi ser derimot at $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, så toppunktet og bunnpunktet nevnt ovenfor er lokale ekstremalpunkt, ikke globale. Figur:



$\boxed{\text{2.8.32}}$ La x_1, x_2 og x_3 være tre ulike punkter i I slik at $f(x_i) = 0$ for alle $i = 1, 2, 3$. Vi kan anta at $x_1 < x_2 < x_3$. Takket være Rolles teorem finnes det punkter $x_{1.5}$ og $x_{2.5}$ i I med følgende egenskaper

- $f'(x_{1.5}) = f'(x_{2.5}) = 0$,
- $x_1 < x_{1.5} < x_2 < x_{2.5} < x_3$.

Her oppstår $x_{1.5}$ som et resultat av Rolles teorem på intervallet $[x_1, x_2]$ og $x_{2.5}$ på $[x_2, x_3]$. Legg merke til at eksistensen av den førstederiverte f' på disse intervallene er en nødvendig antakelse. Ettersom også den andrederiverte f'' eksisterer på I (og dermed også på $[x_{1.5}, x_{2.5}]$), kan vi bruke Rolles teorem til å vise at f'' har et nullpunkt z i intervallet $[x_{1.5}, x_{2.5}]$, som gir oss punktet vi var ute etter.

$\boxed{\text{2.8.33}}$ **a)** Her kan vi bruke sekantsetningen. I dette tilfellet sier den at det finnes et punkt $x_1 \in (0, 2)$ slik at

$$f'(x_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

som er nøyaktig det oppgaven spør etter.

b) Om vi bruker sekantsetningen pa intervallet $(1, 2)$ får vi et punkt $x_{1.5}$ slik at

$$f'(x_{1.5}) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1.$$

Dessuten følger det fra Rolles teorem at det finnes et punkt $x_{2.5} \in (0, 1)$ slik at $f'(x_{2.5}) = 0$. Sekantsetningen anvendt på f' på intervallet $[x_{2.5}, x_{1.5}]$ gir dermed at det finnes en $x_2 \in (x_{2.5}, x_{1.5})$ slik at

$$f''(x_2) = \frac{f'(x_{1.5}) - f'(x_{2.5})}{x_{1.5} - x_{2.5}} > \frac{1}{2}$$

som kommer av at $x_{1.5} - x_{2.5} < 2$. Dette er en passende x_2.

c) Vi har antatt at f' og f'' eksisterer på intervallet $(0, 2)$. Dette gjør f' deriverbar, og dermed også kontinuerlig. Skjæringssetningen gir nå et punkt x_3 mellom x_1 og $x_{2.5}$ slik at $f'(x_3) = \frac{1}{7}$.