Norges teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 6

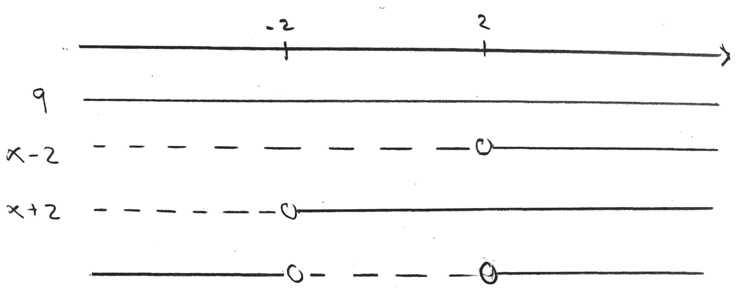
$\boxed{4.5.24}$ Vi har kritiske punkter i endepunkter av definisjonsmengden, der f' ikke eksisterer, og der $f'(x) = 0$. Det er ingen endepunkter av definisjonsmengden her, siden definisjonsmengden er hele $\mathbb{R}$. Videre er

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^3 - 36x - 3) = 9x^2 - 36 = 9(x^2 - 4)$$

Dermed er f' også definert over alt. Vi ser derfor etter punkter der $f'(x) = 0$. Vi løser

$$9(x^2 - 4) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$$

Dermed er $x = \pm 2$ de kritiske punktene. Fortegnslinje:



Fra fortegnslinja er $x = -2$ er toppunkt og $x = 2$ et bunnpunkt. Vi ser at $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, så $(-2, f(-2))$ er et lokalt (men ikke globalt) toppunkt, og $(2, f(2))$ er lokalt (men ikke globalt) bunnpunkt.

$\boxed{4.6.21}$ Siden høyeste potens i telleren er 1 høyere enn høyeste potens i nevneren, har vi en skrå asymptote. Denne finner vi ved følgende utregning

$$\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x - 3x}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) - 3x}{x^2 - 1} = x - \frac{3x}{x^2 - 1}$$

Dermed er $y = x$ en skrå asymptote for f. Videre ser vi at det er vertikale asymptoter i $x = \pm 1$. Siden

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x - \frac{3x}{x^2 - 1}) = -\infty$$

og

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x - \frac{3x}{x^2 - 1}) = \infty$$

har f ingen horisontale asymptoter. Nullpunktene til f finner sted der $x^3 - 4x = 0$, altså der

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0$$

som er $x = 0$, $x = -2$ og $x = 2$. Vi har også følgende grenseverdier

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x - \frac{3x}{x^2 - 1}) = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x - \frac{3x}{x^2 - 1}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x - \frac{3x}{x^2 - 1}) = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - \frac{3x}{x^2 - 1}) = -\infty$$

Vi deriverer

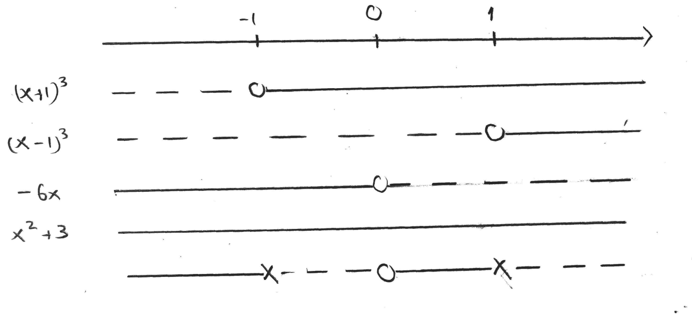
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3 - 4x)' \cdot (x^2 - 1) - (x^3 - 4x) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 4)(x^2 - 1) - (x^3 - 4x)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x^2 + 4 - 2x^4 + 8x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 4}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Siden $x^4, x^2 \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ ser vi at telleren i uttrykket for f' er $\geq 4 > 0$ for alle x. Videre er $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ for alle x. Dermed er $f'(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ (siden funksjonen ikke er definert i ± 1). Dermed er f strengt voksende overalt den er definert.

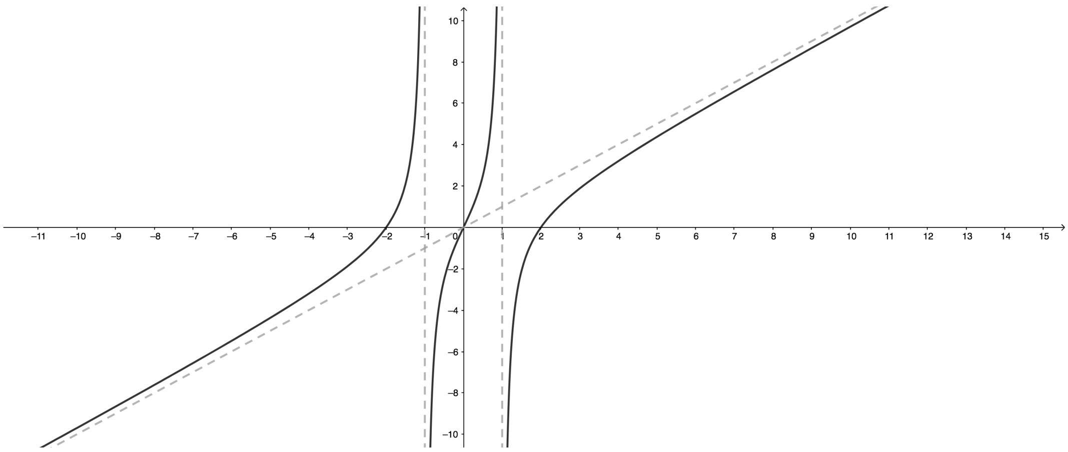
Vi deriverer en gang til

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x^4 + x^2 + 4)' \cdot (x^2 - 1)^2 - (x^4 + x^2 + 4)((x^2 - 1)^2)'}{((x^2 - 1)^2)^2} \\ &= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 + x^2 + 4) \cdot 2(x^2 - 1)(2x)}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 + x^2 + 4)}{(x^2 - 1)^3} \\ &= \frac{4x^5 + 2x^3 - 4x^3 - 2x - 4x^5 - 4x^3 - 16x}{(x^2 - 1)^3} \\ &= \frac{-6x^3 - 18x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{6x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

Vi ser at $f''(x) = 0$ hvis og bare hvis $x = 0$, og at f'' ikke er definert i $x = \pm 1$. Vi faktoriserer $(x^2 - 1)^3 = (x - 1)^3 (x + 1)^3$ og får følgende fortegnslinje



Fra fortegnslinja får vi at $f''(x) \leq 0$ for alle $x \in (-1, 0]$ og $f''(x) \geq 0$ for alle $x \in [0, 1)$. Dermed har vi vendepunkt i $x = 0$. Ved å først føre inn den skrå asymptoten $y = x$ først og bruke all informasjonen vi har tilegnet oss, får vi en graf som ser slik ut



$\boxed{4.9.10}$ Lineariseringen L er gitt ved

$$L = \tan(\frac{\pi}{4}) + \big(\frac{d}{dx}\tan(x)\big)\big|_{x=\frac{\pi}{4}}(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{1}{\cos^2(x)}\big|_{x=\frac{\pi}{4}}(x - \frac{\pi}{4})$$
$$= 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{3.1.29}$ For å vise at f har en invers må vi vise at den er både injektiv og surjektiv. Da finnes det nemlig en invers som er definert på hele verdimengden. Vi har at

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{4x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0, \ \forall x \neq 0.$$

Dermed er f injektiv. Siden $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ er f også surjektiv, og f har en invers. La nå $y = f^{-1}(x)$, så $x = f(y) = \frac{4y^2}{y^2+1}$. Vi deriverer implisitt med hensyn til x og får at

$$1 = \frac{d}{dx}f(y) = \frac{(y^2+1)(12yy') - 4y^3(2yy')}{(y^2+1)},$$

og

$$y' = \frac{(y^2+1)^2}{4y^4 + 12y^2}.$$

Siden $f(1) = 2$, må $f^{-1}(2) = 1$ og

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \left.\frac{(y^2+1)(12yy') - 4y^3(2yy')}{(y^2+1)}\right|_{y=1} = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{5}$ Vi kan bruke teknikken fra oppgave 3.3.43. Vi skriver om og får at

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln(f(x))}.$$

Ved hjelp av kjerneregelen får vi da at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x)^{g(x)} &= \frac{d}{dx}e^{g(x)\ln(f(x))} \\
&= e^{g(x)\ln(f(x))}\frac{d}{dx}\left(g(x)\ln(f(x))\right) \\
&= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right) \\
&= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right).
\end{aligned}$$

Både f og g må være minst en gang deriverbar. I tillegg må $f > 0$, siden den deriverte er avhengig av $\ln(f(x))$ så $D_{f^g} = \{x \in D_f | f(x) > 0\}$.

$\boxed{4.10.24,32}$ Vi trenger de 5 første deriverte:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \\
f'(x) &= \cos x \\
f''(x) &= -\sin x \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x \\
f^{(4)}(x) &= \sin x \\
f^{(5)}(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

La $P_n(x; x_0)$ betegne det n-te ordens taylorpolynomet til $f(x)$ i punktet x_0.

Da er

$$\begin{aligned}
P_5(x;\pi) &= \sum_{i=0}^{5}\frac{f^{(i)}(\pi)}{i!}(x-\pi)^i \\
&= \frac{\sin(\pi)}{0!} + \frac{\cos(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{(-\sin(\pi))}{2!}(x-\pi)^2 \\
&\quad + \frac{(-\cos(\pi))}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{\sin(\pi)}{4!}(x-\pi)^4 + \frac{\cos(\pi)}{5!}(x-\pi)^5 \\
&= -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5
\end{aligned}$$