MA1101 Grunnkurs
Analyse I
Høst 2020

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 7

$\boxed{1}$ Vi viser utsagnet ved induksjon. Se først på tilfellet $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4},$$

som stemmer. Anta så at utsagnet holder for $n = i$, altså at

$$\sum_{k=1}^{i} k^3 = \frac{i^2(i+1)^2}{4}$$

er sant. Vi må vise at det holder for $n = i + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{i+1} k^3 = \sum_{k=1}^{i} k^3 + (i+1)^3 &= \frac{i^2(i+1)^2}{4} + (i+1)^3 \\ &= (i+1)^2\left(\frac{i^2}{4} + i + 1\right) = (i+1)^2\left(\frac{i^2+4i+4}{4}\right) \\ &= (i+1)^2\frac{(i+2)^2}{4} = \frac{(i+1)^2((i+1)+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Altså stemmer utsagnet ved induksjon.

Eventuelt kan man løse det slik som i beviset for Teorem 1 i seksjon 5.1. Vi vet fra tipset i oppgaven at $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$. Ved å bruke teleskoperende summer får vi da at

$$\begin{aligned}(n+1)^4 - 1 = (n+1)^4 - 1^4 &= \sum_{k=1}^{n}((k+1)^4 - k^4) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n\end{aligned}$$

Dette kan vi skrive om til

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}((n+1)^4 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - (n+1))$$

Videre vet vi at

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{k}$$

og

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ved å sette disse uttrykkene inn får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)) \\
&= \frac{(n+1)}{4}((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1) \\
&= \frac{(n+1)}{4}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1) \\
&= \frac{(n+1)}{4}(n^3 + n^2) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

$\boxed{2}$ **a)** Her bruker vi den kjente summeformelen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nemlig,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= n(n+1) - n \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

b) Her bruker vi også den nokså kjente summeformelen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nemlig,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 \\
&= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= n\left(\frac{2}{3}(n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1\right) \\
&= n\left(2(n+1)\left(\frac{1}{3}(2n+1) - 1\right) + 1\right) \\
&= n\left(2(n+1)\left(\frac{2}{3}n - \frac{2}{3}\right) + 1\right) \\
&= n\left(\frac{4}{3}(n+1)(n-1) + 1\right) \\
&= n\left(\frac{4}{3}(n^2-1) + 1\right) \\
&= n\left(\frac{4}{3}n^2 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{n}{3}\left(4n^2-1\right) \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Dersom rekken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer mot L, vil vi for alle $\varepsilon > 0$ kunne finne et heltall N slik at

$$L - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$. Med andre ord kovergerer følgen $\{\sum_{k=n}^{\infty} a_k\}_n$ mot 0. Om vi fjerner de to første leddene, får vi følgen $\left\{\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k\right\}_n$, som også konvergerer mot 0. Følgen $\{a_n + a_{n+1}\}_n$, som vi skal vise at konvergerer mot 0, fremstår som differansen av disse to følgene, i den forstand at

$$a_n + a_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k - \sum_{k=n}^{\infty} a_k.$$

Ved regnereglene for grensevedier (se infoboks på s. 504 i læreboken) følger det at

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k - \sum_{k=n}^{\infty} a_k\right) = 0 - 0 = 0.$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi har at $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$. Dermed er

$$S := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Vi splitter opp i en sum over partallene og en sum over oddetallene

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\Big)\Big)$$

som er to teleskoperende summer. Videre har vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(\frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{2k+2}\Big) = \frac{1}{2}$$

Dermed er

$$S = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4}$$

b) Leddene kan oppspaltes som følger

$$\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

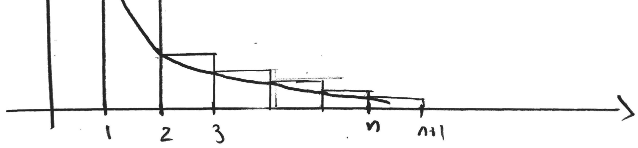
blir dermed teleskoperende, med sum lik

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

c) La s_n være n-te delsum av $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$, det vil si, $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$. Da er

$$\begin{aligned}
s_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} &= \text{sum av arealene til rektanglene i figur under}\\
&> \text{arealet under } y = \frac{1}{2x-1} \text{ fra } x = 1 \text{ til } x = n+1\\
&= \int_1^{n+1}\frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_1^{n+1}\\
&= \frac{1}{2}\ln(2n+1)
\end{aligned}$$

og $\lim_{n\to\infty}\ln(2n+1) = \infty$. Dette viser at $\lim_{n\to\infty}s_n = \infty$ og dermed at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ divergerer mot ∞. Figur:



d) Vi ønsker først å skrive om leddene til

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

for $A, B, C \in \mathbb{R}$. Vi multipliserer med $n(n+1)(n+2)$ på begge sider av denne likningen og får

$$\begin{aligned} A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1) = 1 \\ \iff An^2 + 3An + 2A + Bn^2 + Bn + Cn^2 + Cn = 1 \\ \iff (A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + 2A = 1 \end{aligned}$$

For at dette skal være tilfredsstilt for alle n må vi ha

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ 3A + 2B + C &= 0 \\ 2A &= 1 \end{aligned}$$

Siste likning har løsning $A = \frac{1}{2}$. Første likning gir $C = -B - A = -B - \frac{1}{2}$. Vi setter dette inn i andre likning og får

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{2} + 2B + \left(-B - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \iff B + 1 &= 0 \end{aligned}$$

som gir $B = -1$. Igjen gir dette $C = -B - A = -(-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Dermed kan vi skrive

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1} \Big) - \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+2} \Big) \\ &= \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Big) - \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \Big) \Big) \end{aligned}$$

Begge de to siste summene er teleskoperende. Dermed får vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Big) - \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \Big) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \Big(\lim_{k\to\infty} \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{k+1} \Big) - \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{k+2} \Big) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \Big(1 - \frac{1}{2} \Big) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n+1) - \log(n))$$

er teleskoperende. Om vi forsøker å evaluere summen, får vi

$$\lim_{n\to\infty} (\log(k+1) - \log(1)) = \infty.$$

Følgelig må dette divergere.

5.1.23'

a) Fiks $n \in \mathbb{N}$. Anta først at $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergerer og la $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. La $M = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$. Da er

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = S - M$$

og det følger at $\sum_{i=n}^{\infty} a_i$ konvergerer.
Motsatt, anta at $\sum_{i=n}^{\infty} a_i$ konvergerer, og la M være som over. Da er

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=n}^{\infty} a_i = M + \sum_{i=n}^{\infty} a_i$$

som konvergerer.

b) Siden rekken $\sum_{i=1}^{\infty} a_k$ konvergerer, skal det for alle $\varepsilon > 0$ eksistere et heltall N slik at

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$. Dette nøyaktig hva som kreves for konvergens av følgen $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ mot 0.

7 Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n+1}}$ er ikke langt ifra geometrisk. Litt omskrivning gir at

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n+1}} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}\right) \\ &= \frac{1}{14}.\end{aligned}$$