Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

1 La $\varepsilon > 0$. Dersom $B = 0$ er $f \equiv 0$, og $F \equiv 0$ er trivielt kontinuerlig, så vi kan velge hvilken som helst δ. Dersom $B > 0$ gjelder i stedet

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq \int_{x_0}^x |f(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{x_0}^x \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)|\,\mathrm{d}s \\
&= \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)|\,|x - x_0| \\
&\leq B\,|x - x_0|\,.
\end{aligned}$$

Dersom $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{B}$, så vil $B|x - x_0| < \varepsilon$. Vi kan dermed velge $\delta < \frac{\varepsilon}{B}$.

2 **a)** Integralet $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ kan beregnes ved bruk av substitusjonen

$$\begin{aligned}
\theta &= \arctan(x) \\
\mathrm{d}\theta &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Denne gir nemlig at

$$\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} e^{\theta}\mathrm{d}\theta = \left[e^{\theta}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = e^{\pi/3} - e^{\pi/6} = e^{\pi/6}(e^{\pi/6} - 1).$$

b) Integralet $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+4}$ har et andregradspolynom i nevneren. Ettersom $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, kan vi gå frem med delbrøksoppspalting. Vi skal altså finne relle tall A og B slik at

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

Om vi legger sammen brøkene på høyre side, ser vi at vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
-4A - B &= 1,
\end{aligned}$$

og gir en kort utregning at $A = -\frac{1}{3}$ og $B = \frac{1}{3}$.

$$
\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 4} &= \int_2^3 \frac{\frac{-1}{3}\mathrm{d}x}{x-1} + \int_2^3 \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}x}{x-4} \\
&= \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-4} - \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\
&= \frac{1}{3}\left([\ln|x-4|]_2^3 - [\ln|x-1|]_2^3 \right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(1) - \ln(2) - \ln(2) + \ln(1)\right) \\
&= \frac{-2\ln(2)}{3} \simeq -0.462.
\end{aligned}
$$

c) Vi minner om at funksjonen sgn er stykkevis definert:

$$
\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \\ -1 & \text{om } x < 0 \end{cases}
$$

Det følger at integralet kan skrives som en sum av tre lettere integraler

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x + \int_2^2 \frac{0}{x^2}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_2^3 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{-1}{x}\right]_2^3 - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^2 \\
&= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

d) Funksjonen $\sin(x^5)$ er odde, ettersom den er en komposisjon av to odde funksjoner. Om vi ganger denne med en jevn funksjon, for eksempel x^2, vil produket $x^2\sin(x^5)$ fortsatt være odde. Integralet $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} x^2\sin(x^5)\mathrm{d}x$ blir 0, siden integrasjonsintevallet er symmetrisk om $x = 0$.

e) Vi undersøker først om integralet $\int_{1/2}^1 \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$ blir lettere uttrykt etter vi har benyttet delvis integrasjon. La altså

$$
\begin{aligned}
u &= \arcsin(x) \\
\mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2}} \\
v &= \frac{-1}{x} \\
\mathrm{d}v &= \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Vi får at

$$
\begin{aligned}
\int_{1/2}^{1} \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[\frac{-\arcsin(x)}{x}\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{-\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{\arcsin(1/2)}{1/2} - \frac{\arcsin(1)}{1} + \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{-\pi}{6} + \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}
$$

Vi står fortsatt igjen med et mystisk integral. Faktoren $\sqrt{1-x^2}$ i nevneren av integranden gir uttrykk for at følgende substitusjon kan bli nyttig:

$$
\begin{aligned}
x &= \sin\theta \\
\mathrm{d}x &= \cos\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

Vi får nemlig at

$$
\begin{aligned}
\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} \\
&= [\ln\tan(x/2)]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln\frac{\tan\pi/4}{\tan\pi/12} = \ln\frac{1}{2-\sqrt{3}} \simeq -.
\end{aligned}
$$

(husk at vi fant det ubestemte integralet $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$ på Øving 8).
Nå er alle brikkene på plass.

$$
\int_{1/2}^{1} \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{-\pi}{6} + \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\pi}{6} + \ln\frac{1}{2-\sqrt{3}} \simeq 0.793.
$$

f) Ettersom vi har faktoren $\sqrt{9-x^2}$ i nevneren av integranden, substituerer vi

$$
\begin{aligned}
x &= 3\sin\theta \\
\mathrm{d}x &= 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

og får

$$
\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int_{\arcsin(1/3)}^{\arcsin(2/3)} \frac{3\cos\theta\mathrm{d}\theta}{(3\sin\theta)^2\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}} = \int_{\arcsin(1/3)}^{\arcsin(2/3)} \frac{\mathrm{d}\theta}{9\sin^2\theta}.
$$

Vi har sett i forelesning at $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} = -\cot\theta$, så det følger at

$$
\int_{\arcsin(1/3)}^{\arcsin(2/3)} \frac{\mathrm{d}\theta}{9\sin^2\theta} = \frac{1}{9}\left[-\cot\theta\right]_{\arcsin(1/3)}^{\arcsin(2/3)} = \frac{1}{9}\left[-\cot\arcsin\theta\right]_{1/3}^{2/3}.
$$

Den velkjente identiteten $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ gir at $\cos\arcsin\theta = \sqrt{1-\theta^2}$.

Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \frac{1}{9}\left[-\cot\arcsin\theta\right]_{1/3}^{2/3} \\
&= \frac{1}{9}\left[-\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}\right]_{1/3}^{2/3} \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{1-(1/3)^2}}{1/3} - \frac{\sqrt{1-(2/3)^2}}{2/3}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 0.190.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Evaluer følgende uekte integral, eller vis at de divergerer:

a) La oss først benytte substitusjonen

$$\begin{aligned} t &= x - 1 \\ \mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

slik at

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

Vi har nå et integral som evalueres til

$$\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}.$$

b) Vi gjenkjenner den antideriverte av $\frac{1}{x^2+1}$ som $\arctan(x)$. Integralet kan således beregnes.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = [\arctan(x)]_{-\infty}^{-1} = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

c) Her benytter vi substitusjonen

$$\begin{aligned} t &= x + 1 \\ \mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

slik at

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{t^{\frac{2}{3}}}.$$

Vi har nå et integral som evalueres til

$$\left[\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_0^2 = 3\sqrt[3]{2} \simeq 3.78.$$

d) Vi gjør et forsøk på å finne en verdi for $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$. En mulig fremgangsmåte er delbrøksoppslating

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int_0^a \left(\frac{\frac{1}{2a}}{a-x} + \frac{\frac{1}{2a}}{a+x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right]_0^a.$$

Her får vi ikke et endelig utrykk. Det går nemlig mot ∞ når x går mot a.

e) Vi forenkler integralet $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x}}$ med substitusjonen

$$\begin{aligned} x &= \sin^2\theta \\ \mathrm{d}x &= 2\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

Da får vi

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}x}{\sin^2\theta\cos\theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\mathrm{d}x}{\sin\theta}.$$

Vi vet at $\sin\theta > \theta$ på intervallet $[0, \pi/2]$, så integralet $\int_0^{\pi/2} \frac{2\mathrm{d}x}{\sin\theta}$ divergerer dersom $\int_0^{\pi/2} \frac{2\mathrm{d}x}{\theta}$ divergerer. Dette er tilfellet, ettersom integralet

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\mathrm{d}x}{\theta} = [\ln|\theta|]_0^{\pi/2}$$

ikke er definert.

$\boxed{4}$ Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ er ikke definert for $x = 0$, og er dermed ikke kontinuerlig over hele integrasjonsområdet. Analysens fundamentalteorem kan derfor ikke anvendes på intervallet $[-1, 1]$.
Videre kan vi merke oss at $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [-1, 1]$. Vi ville derfor forventet at

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > 0.$$

Siden -2 er negativ, vil dette ikke være en fornuftig løsning på integralet.

$\boxed{5}$ Addisjonsformelen for cosinus sier at $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$. Dette gir oss at

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right) =& \frac{1}{2}\left(\cos x\cos y + \sin x \sin y + \cos x \cos y - \sin x \sin y\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(2\cos x \cos y\right) \\ =& \cos x \cos y. \end{aligned}$$

Vi bruker dette på integralet og får at

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} + \frac{\sin((m+n)x)}{m+n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\sin(k\pi) = 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$.
NB! Dersom $m = \pm n$ vil ikke påstanden stemme. I dette tilfellet vil integralet bli redusert til

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(2mx) + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2mx)}{2m} + x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) = \pi.$$