



- 1 Evaluer følgende uekte integral, eller vis at de divergerer:

$$\int_0^1 \ln x \, dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx,$$
$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx.$$

- 2 Avgjør om disse uekte integralene konvergerer eller divergerer. Begrunn svaret.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^5 + 1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^3} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx.$$

- 3 La

$$F : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\theta) = \int_{\cos \theta}^{\sin \theta} \frac{dx}{1-x^2}.$$

Bestem de kritiske punktene og vendepunktene til F .

- 4 Er

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

et uekte integral eller et riemannintegral?

- 5 La $a < b$ og $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Finn verdien $t \in \mathbb{R}$ slik at integralet

$$\int_a^b (f(x) - t)^2 dx$$

er minst mulig.

6 Finn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\cos(\pi t^2)}{t^2 + 1} dt.$$

7 (Repetisjon) Dersom f er en deriverbar og injektiv funksjon definert på et åpent intervall som inneholder $x = 1$, og f oppfyller

$$f(1) = 3 \quad \text{og} \quad f'(1) = 2,$$

bestem

$$(f^{-1})'(3).$$

8 (Repetisjon) La

$$f(x) = \begin{cases} 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- Vis, ved hjelp av et ε - δ argument, at f er kontinuerlig i $x = 0$.
- Er f deriverbar i $x = 0$? (Bevis, motbevis).
- Avgjør hvorvidt f er uniformt kontinuerlig på $[-1, 1]$.