Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

*Merk at øvingsoppgavene iblandt kan skille seg noe fra tilsvarende oppgaver i Adams&Essex. Det er da versjonene nedenfor som gjelder. Merk også at oppgaver med ordet 'beregn' ikke fordrer samme stringens som oppgaver med ordet 'bevis'; man trenger for beregningsoppgaver ikke bruke $\epsilon, \delta, N$-definisjonene, men kan regne direkte med limes-notasjon (f.eks. $x^2 \to 0$ når $x \to 0$).*

**1.2:14,22,30** Avgjør om følgende grenseverdier eksisterer (et kort argument mot, eller regning som gir en verdi er tilstrekkelig).

**a)** $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4}$

**b)** $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

**c)** $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

**2** Bevis at følgende grenser eksisterer og er riktige.

**a)** Ved hjelp av $\epsilon/\delta$-definisjonen: $\lim_{x\to 2}(5-2x) = 1$.

**b)** Ved hjelp av $\epsilon/\delta$-definisjonen: $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$.

**3** Avgjør hvilke av følgende uttrykk som definerer kontinuerlige funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**a)**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

**b)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

**1.2:78** Bestem (den naturlige) definisjonsmengden til funksjonen

$$f\colon x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vis at $\lim_{x\to 0} f(x)$ eksisterer, og at det finnes en kontinuerlig funksjon $\tilde{f}$ som er lik $f$ i alle punkter utenom $x = 0$. Funksjonen $\tilde{f}$ sies i dette sammenheng å være en *kontinuerlig utvidelse* av $f$.

**1.2.27, 41, 58, 61** Beregn følgende grenseverdier ved hjelp av setninger og regneregler for grenser (d.v.s. ikke med $\varepsilon$).

**a)** $\lim_{t\to 0} \frac{t^2+3t}{(t+2)^2-(t-2)^2}$

**b)** $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ for $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0.$

**c)** $\lim_{x\to a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2}, \qquad a > 0.$

**d)** $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ for $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq -1, \\ x^2+1, & x > -1. \end{cases}$

**1.2.55** Angi hva i definisjonen for ensidige grenseverdier som ikke er oppfylt for uttrykket

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3 - x}.$$

*Obs. at notasjonen ovenfor ikke er et matematisk utsagn, ettersom grensen ikke eksisterer!*

**1.3.1,12** Bevis at følgende grenser eksisterer og er riktige.

**a)** Ved hjelp av $\epsilon/N$: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x-3} = \frac{1}{2}.$

**b)** Ved hjelp av $N/\delta$: $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(3-x)^2} = \infty.$

**1.3.9,25,30** Beregn følgende grenseverdier ved hjelp av setninger og regneregler for grenser.

**a)** $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

**b)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x+x^3+x^5}{1+x^2+x^3}$

**c)** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

**1.4.29** Bevis at $f(x) = x^3 + x - 1$ har et nullpunkt på intervallet $[0, 1]$.

*Merk at 'et' betyr 'minst et', mens 'ett' ville ha betydd 'nøyaktig ett'.*

**1.4.17** Bestem verdien av $k \in \mathbb{R}$ slik at

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ k - x^2, & x > 2, \end{cases}$$

definerer en kontinuerlig funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Avgjør også om funksjonen vil være høyrekontinuerlig, venstrekontinuerlig eller diskontinuerlig for andre verdier av $k$, i $x = 2$.