Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse I
Høst 2020

Øving 4

Merk at øvingsoppgavene iblandt kan skille seg noe fra tilsvarende oppgaver i Adams&Essex. Det er da versjonene nedenfor som gjelder.

2.1.7,9 Tegn grafen, og finn likningene på formen $y = kx + m$ for tangent og normal i punktet x_0 (tegn disse og) til

a) $f(x) = \sqrt{x+1}, \qquad x_0 = 3.$

b) $f(x) = \frac{2x}{x+2}, \qquad x_0 = 2.$

Tips for å tegne grafen: grenseverdien når $x \to \infty$ kan ofte gi god informasjon om den asymptotiske oppførselen til en funksjon.

2.2.13,15,24 Bestem, ved hjelp av definisjonen, den deriverte til følgende funksjoner

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^3.$

b) $g\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{2-x}{2+x}.$

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{t^2-3}{t^2+3}.$

Angi også definisjonsmengdene for funksjonene f', g', og h'.

2.2.47 Finn likningene for de to linjene som passerer gjennom punktet $(x_0, y_0) = (1, -3)$ og tangerer kurven gitt ved $y = x^2$, det vil si grafen

$$\{(x, x^2)\colon x \in \mathbb{R}\}$$

til funksjonen $x \mapsto x^2$.

2.2.53 Bruk faktoriseringen $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ til å vise at

$$\frac{d}{dx} x^{1/3} = \frac{1}{3} x^{-2/3}, \qquad x \neq 0,$$

ved hjelp av definisjonen av den deriverte.

2.3.8,17,31 Beregn

a) $\frac{d}{dt}\left(3\sqrt[3]{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t^3}}\right), \qquad t \neq 0.$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-4x^2}{x^3}\right)$, $\qquad x \in \mathbb{R}$.

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2x+\frac{1}{3x+1}}\right)\Bigg|_{x=1}$.

$\boxed{\text{2.4.3,12,28,30}}$ Finn

a) $\frac{d}{dx}(4-x^2)^{10}$,

b) $\frac{d}{dx}(2+|x|^3)^{1/3}$,

c) $\frac{d}{dx}f(2f(3f(x)))$, $\qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vilkårlig*,

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right)\Bigg|_{x=-2}$,

og angi i (a), (b) og (c) for hvilke verdier av x dette gjelder.

$\boxed{\text{2.5.57}}$ Bestem følgende grenseverdier

a) $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h^2}$.

b) $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{\pi - \pi\cos^2(x)}{x^2}\right)$.

$\boxed{8}$ La $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$. Vis at f er en deriverbar funksjon $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ med egenskapen at

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

men at grenseverdien av $f'(x)$ ikke eksisterer når $\lim_{x\to 0^+}$.