Dette er femte øving. Observer minimumskravet 8/12 øvinger godkjente for å gå opp til eksamen. Sjekk status i Blackboard.

2.6.17 La $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}\cdot$

a) Finn $f^{(3)}(x)$.

b) Finn en formel for $f^{(n)}(x)$ for $n \in \mathbb{N}$.
BONUS: Vis ved induksjon at uttrykket er korrekt.

2.8.5 Vis at

$$\tan x > x \qquad \text{når} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\cdot$$

Obs. ikke geometrisk/grafisk, men analytisk!

3 Finn en kontinuerlig deriverbar reell funksjon f med $f(0) = f'(0) = 0$, som likevel er strengt voksende, det vil si,

$$f(y) > f(x) \qquad \text{dersom} \qquad y > x.$$

Dette viser at streng monotoni ikke er det samme som strengt tegn på den deriverte; det siste er sterkere.

2.8.29 Finn og bevis Darboux's teorem.
Hvorfor er dette (muligens) overraskende etter det vi har lært tidligere?

2.9.10 Bruk (formell) implisitt derivasjon til å finne tangenten til kurven (x, y) når

$$x^2y^3 - x^3y^2 = 12, \qquad (x, y) = (-1, 2).$$

6 La $z = \tan x$.

a) Vis at $1 + z^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

b) Gitt at $\dfrac{dz}{dx} = \frac{1}{dx/dz}$ når begge kvotienter er endelige, vis at

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Du har nettopp beregnet den deriverte til funksjonen arctan.

$\boxed{\text{4.3.3,5,7,34}}$ Beregn

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)},\quad$ for $a, b > 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{\tan x - x}$

d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$, gitt at f er to ganger deriverbar.

$\boxed{\text{4.4.21}}$ Finn og klassifiser alle ekstremalverdier og kritiske punkter til

$$f(x) = x^3(x-1)^2.$$

Skisser grafen til f.

$\boxed{\text{2.8.32}}$ La $f : I \to \mathbb{R}$ være en funksjon, der I er et interval. Dersom f er to ganger deriverbar og er lik 0 på minst tre ulike punkter i I, vis at f'' er null på minst ett punkt i I.

$\boxed{\text{2.8.33}}$ La $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Dersom f er to ganger deriverbar på $(0, 2)$ og $f(0) = f(1) = 0, f(2) = 1$, vis at

a) det finnes et punkt $x_1 \in (0, 2)$ slik at $f'(x_1) = \dfrac{1}{2}$,

b) det finnes et punkt $x_2 \in (0, 2)$ slik at $f''(x_2) > \dfrac{1}{2}$,

c) det finnes et punkt $x_3 \in (0, 2)$ slik at $f'(x_3) = \dfrac{1}{7}$.