MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2020

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 8

1 a) Vi integralet $\int \cos(ax+b)\ \mathrm{d}x$ ved hjelp av en lineær substitusjon. La $u = ax+b$, $du = a\ \mathrm{d}x$. Vi får da at

$$\int \cos(ax+b)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\cos(u)}{a}du = \frac{1}{a}\sin(u) + C = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

b) Vi deler integralet $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$ i to,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

Substitusjonen $u = 1-x^2$, $du = -2x\ \mathrm{d}x$ gir oss at

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}du = -\sqrt{u} + K = -\sqrt{1-x^2} + K.$$

For å løse det siste integralet bruker vi at $\frac{d}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, så

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) + C.$$

c) Ved delvis integrasjon med $v' = 1$ og $w = \arcsin^2 x$ får vi

$$\int \arcsin^2 x = x\arcsin^2 x - \int x \cdot 2\arcsin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = x\arcsin^2 x + \int \arcsin(x) \cdot \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

La oss derfor se på det andre leddet. Hvis vi setter $1-x^2$ blir $du = -2x\ \mathrm{d}x$ og derfor

$$\int \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{1-x^2}$$

Derfor vil delvis integrasjon for leddet $\int \arcsin(x) \cdot \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$ med $v' = \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}$ og $w = \arcsin(x)$ gi

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x) \cdot \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x &= \arcsin(x) \cdot 2\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= 2\arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2} - 2\int 1\ \mathrm{d}x \\ &= 2\arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x + C\end{aligned}$$

Setter vi alt sammen får vi nå

$$\int \arcsin^2 x\ \mathrm{d}x = x \cdot \arcsin^2(x) + 2\arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x + C$$

d) Integralet $\int \cot(x)\ \mathrm{d}x$ kan beregnes med substitusjonen $u = \sin(x)$. Da er $\mathrm{d}u = \cos(x)\ \mathrm{d}x$ og vi får

$$\int \cot(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) + C = \ln(\sin(x)) + C,$$

der C er en vilkårlig konstant.

e) Vi har sett i forelesning at integrander som er rasjonale funksjoner av $\sin(x)$ og $\cos(x)$ kan begrenes med substitusjonen $u = \tan(x/2)$. Da er nemlig $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ og $\mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}u}{1+u^2}$. Integralet vårt blir således

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \int \frac{\frac{2\ \mathrm{d}u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|\tan(x/2)| + C,$$

der C er en vilkårlig konstant.

$\boxed{2}$ a) Vi finner først det ubestemte integralet. Delvis integrasjon gir

$$\int x\cos x\ \mathrm{d}x = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\ \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

Dermed er

$$\int_0^1 x\cos x\ \mathrm{d}x = [x\sin x + \cos x]_0^1 = 1\cdot\sin 1 + \cos 1 - 0\cdot\sin 0 - \cos 0 = \sin 1 + \cos 1 - 1$$

b) Vi finner først det ubestemte integralet. La $I = \int e^{-x}\sin x\ \mathrm{d}x$. Delvis integrasjon gir

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-x}\sin x\ \mathrm{d}x = -e^{-x}\sin x - \int -e^{-x}\cos x\ \mathrm{d}x \\ &= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\ \mathrm{d}x \\ &= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x + \int e^{-x}(-\sin x)\ \mathrm{d}x \\ &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) - I \end{aligned}$$

Vi skriver dette om til

$$2I = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

som gir

$$\int e^{-x}\sin x\ \mathrm{d}x = I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

Ved å sette inn integrasjonsgrensene får vi da

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-x}\sin x\ \mathrm{d}x &= \Big[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\pi}(\sin\pi + \cos\pi) - \Big(-\frac{1}{2}e^{-0}(\sin 0 + \cos 0)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1). \end{aligned}$$

3 a) Når vi integrerer brøkuttrykk må vi sikre at funksjonen er definert over hele integrasjonsområdet. Uttrykket $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ er udefinert for $x = 0$, men dette ligger utenfor integrasjonsområdet vårt, så vi kan integrere direkte.

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-2}^{-1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

b)

$$\int_0^e a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}\Big|_0^e = \frac{a^e}{\ln a} - \frac{a^0}{\ln a} = \frac{a^e - 1}{\ln a}$$

c) Her bruker vi identiteten $cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, som lar oss skrive om integralet som følger

$$\int_0^{\pi/2} \sin^(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \sin(x) \,\mathrm{d}x.$$

Nå bruker vi substitusjonen $u = \cos(x)$. Da er $\mathrm{d}u = -\sin(x) \,\mathrm{d}x$ og

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \sin(x) \,\mathrm{d}x = \int_1^0 (1 - u^2)(-\,\mathrm{d}u) = \int_0^1 (1 - u^2) \,\mathrm{d}u = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

d) Vi prøver substitusjonen $u = \ln(x)$. Da er $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$ og

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln(x)} = \int_2^3 \frac{x \,\mathrm{d}u}{xu} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln(u)]_2^3 = \ln(3) - \ln(2) = \ln(3/2).$$

e) Også her blir substitusjonen $u = \ln(x)$ ($\Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$) nyttig.

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)^3}{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{u^3}{x} x \,\mathrm{d}u = \int_0^2 u^3 \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^2 = 4.$$

4 Vi gjenkjenner uttrykket som en Riemannsum over en partisjon av intervallet $[0, 1]$ med $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $f(x) = \sqrt{x}$ og $c_i = \frac{i}{n}$. Da er

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2}+1}\right]_{x=0}^1 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

5 Siden f er ikke-avtakende får vi den øvre summen ved å evaluere f i høyre endepunkt for hvert intervall $[x_j, x_{j+1}]$ og vi får den nedre summen ved å evaluere f i venstre endepunkt for hvert intervall $[x_j, x_{j+1}]$ for alle $0 \le j \le n$. Med andre ord

$$U(P_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{1}{n}$$

og

$$L(P_n) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n}$$

Da får vi at

$$U(P_n) - L(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{1}{n}$$

Dette er en teleskoperende rekke, så

$$U(P_n) - L(P_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{n} = \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

siden $x_n = 1$ og $x_0 = 0$ for alle n. Videre er

$$\lim_{n\to\infty} U(P_n) - L(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(1) - f(0)}{n} = 0$$

Teorem 3 i Appendix IV sier at en begrenset funksjon g er integrerbar på $[a, b]$ hvis og bare hvis for alle $\varepsilon > 0$ så finnes en partisjon P av $[a, b]$ slik at $U(P) - L(P) < \varepsilon$. Men siden f er ikke-avtakende er f begrenset nedenfra av $f(0)$ og begrenset ovenfra av $f(1)$. Så f er begrenset på $[0, 1]$. Da har vi akkurat vist at Teorem 3 i Appendix IV er gyldig for funksjonen f med partisjonen P_n. Vi konkluderer med at f er integrerbar på $[0, 1]$.

$\boxed{6}$

a) La $\varepsilon > 0$ og la $x_0 \in \mathbb{R}$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at for $|x - x_0| < \delta$ så er $|x^3 - x_0^3| < \varepsilon$. La n være et heltall slik at $n > |x_0| + 1$, og la samtidig n være så stor at $\frac{\varepsilon}{3n^3} < 1$. La nå $\delta < \frac{\varepsilon}{3n^3}$. Merk at $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$. For $|x - x_0| < \delta$ har vi da

$$\begin{aligned}|x^3 - x_0^3| &= |x - x_0||x^2 + xx_0 + x_0^2| < \delta \cdot |x^2 + xx_0 + x_0^2| \\ &< \frac{\varepsilon}{3n^3} \cdot |x^2 + xx_0 + x_0^2| < \varepsilon\end{aligned}$$

Siste ulikhet kommer av at $|x^2 + xx_0 + x_0^2| \leq |x|^2 + |x||x_0| + |x_0|^2 < n^2 + n^2 + n^2 = 3n^2$. Dette holder siden $n > |x_0| + 1$ og $|x| < |x_0| + 1$ ettersom $\delta < 1$. Det følger at $f : x \mapsto x^3$ er en kontinuerlig funksjon i punktet x_0.

b) La $a > 0$ og la $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at for $x, y \in [0, a]$ med $|x - y| < \delta$ så er $|x^3 - y^3| < \varepsilon$. Siden $x, y \in [0, a]$ er $|x^2 + xy + y^2| \leq |x|^2 + |x||y| + |y|^2 \leq a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$. La nå $\delta < \frac{\varepsilon}{3a^2}$ og la $|x - y| < \delta$. Nok en gang bruker vi $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ og får at

$$|x^3 - y^3| = |x - y||x^2 + xy + y^2| < \delta|x^2 + xy + y^2| < \frac{\varepsilon}{3a^2} \cdot 3a^2 = \varepsilon$$

Det følger at $f : x \mapsto x^3$ er uniformt kontinuerlig på $[0, a]$ for alle $a > 0$.