



1 La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en Riemann-integrerbar funksjon med

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = B$$

for et endelig tall B . Vis ved et ε/δ -argument at funksjonen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

er kontinuerlig i hvert punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

2 Beregn

$$\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx, \quad \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}, \quad \int_1^3 \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2} dx, \quad \int_{-2\pi}^{2\pi} x^2 \sin(x^5) dx,$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{\arcsin x}{x^2} dx, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}.$$

3 Evaluer følgende uekte integral, eller vis at de divergerer:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^3}, \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1}, \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int_0^a \frac{dx}{a^2-x^2}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}.$$

- 4 Følgende utregning inneholder en feil:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 + \frac{1}{-1} = -2.$$

Vis hva som gikk galt i utregningene. Hvorfor kan ikke -2 være en fornuftig løsning på integralet?

- 5 Bruk addisjonsformelen for $\cos(x \pm y)$ til å vise at

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)).$$

Bruk dette til å vise at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0,$$

for m, n heltall og $m \neq n$.