Oppgave 1 Bestem hvilke av utsagnene som er sanne og usanne. Svar med «Sann» eller «Usann». *Det trengs ikke begrunnelse i denne oppgaven.*

a) Dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon slik at $f'(x)$ er begrenset, er $f(x)$ også begrenset.

b) Gitt ein begrenset funksjon $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, finnes et punkt $x \in (0,1)$ slik at $f(x) > f(y)$ for alle $y \neq x$.

c) En deriverbar funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredstiller $f'(x) < 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ er injektiv (1-1).

d) Dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en begrenset og deriverbar funksjon, er $f'(x)$ også en begrenset funksjon.

e) Dersom $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en begrenset følge i $\mathbb{R}$, så finnes det en delfølge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ slik at $\lim_{k\to\infty} |b_k - b_{k+1}| = 0$.

f) Det finnes reelle tall $a, b \neq 0$ slik at $\int_{-1}^{1} (a-b)(\cos(x) + \sin(x))\, dx = -1$.

g) Enhver kontinuerlig funksjon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ er begrenset.

h) Gitt en kontinuerlig funksjon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ slik at $f(0) = -2$ og $f(1) = 2$, finnes et punkt $x \in (0,1)$ slik at $f(x) = x$.

i) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig i x. Da eksisterer grensen $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

j) Funksjonen

$$f = \begin{cases} x\sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$.

Oppgave 2 La
$$f(x) = \arctan(x^2), \qquad x \in \mathbb{R},$$
hvor $\arctan(x)$ betegner den inverse funksjonen til $\tan(x)$. Bestem intervallene der f er voksende og avtagende. Finn alle vertikale, horisontale, og skrå asymptoter til f. Lag en skisse av grafen til $y = f(x)$ med hjelp av dine svar. Finn eventuelle maksimums og minimumspunkter til $f(x)$ og tilsvarende maksimums og minimumsverdier.

Hint: Husk at
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Oppgave 3

a) Beregn Taylorpolynomet av grad 4 rundt punktet $x = 0$ til funksjonen
$$f(x) = \sin(x)e^x.$$

b) Finn en tilnærming til $\sin(\frac{1}{2})\sqrt{e}$ med feil mindre enn $0.03125 = (\frac{1}{2})^5$ ved å bruke Taylorpolynomet av grad 3 rundt punktet $x = 0$.

Hint: Husk at
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Oppgave 4

a) Beregn $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{2024} - x^2 + 3x}{x^{2023} + x}$.

b) Beregn $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\frac{1}{x^2}$.

c) Vis at
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Oppgave 5 Betrakt følgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, rekursivt definiert av

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+a_n}}, \qquad n \geq 1.$$

a) Vis ved hjelp av induksjon at følgen er avtagende.

b) Vis at følgen er begrenset.

c) Motiver at følgen er konvergent og beregn $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Oppgave 6

a) Beregn $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \sin x \, dx$.

b) Beregn $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$.

c) Beregn $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(e^{-x}) \, dx$.

Oppgave 7 Vis ved hjelp av sammenligningstesten at

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{x^3 + \ln x}$ er konvergent.

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + \ln x}$ er divergent.