

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Øving 2
Høst 2024**Innleveringsfrist:** Mandag 9. September

Lever øvingen i Øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys.

- 1 La $A = \{5, 7, 16\}$, $B = \{0, 5, 10, 16, 19\}$ og beregn

$$A \cup B, \quad B \cap A, \quad B \setminus A.$$

- 2 Gitt mengdene

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\right\}, \quad B = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, 4, \dots\right\}.$$

- a) Vis at 1 er en øvre skranke for A . Altså at $a \in A \implies a \leq 1$.
- b) Vis at for alle $\varepsilon > 0$ finnes det et element $a \in A$ slik at $a > 1 - \varepsilon$.
- c) Konkluder med at $\sup(A) = 1$
- d) Finn infimum av B .

- 3 La $A, B \subset \mathbb{R}$ være begrensede delmengder av de reelle tallene.

- a) Vis at $\sup A \cap B \leq \sup A$.
- b) Hva kan du si om $\sup A \cup B$?

- 4 Finn røttene til følgende polynom

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2.$$

Gi multiplisiteten til repeterende røtter.

Skriv til slutt polynomet som ett produkt av lineære faktorer.

- 5 Finn den naturlige definisjonsmengden og verdimengden til følgende funksjoner.

a) $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x - 2}}$

Ordbok (Norsk – Engelsk): Definisjonsmengde – Domain, Verdimengde – Range/Image.

- 6 Gitt en funksjon f , anta at hvis x er i definisjonsmengden til f så er også $-x$ i definisjonsmengden. Vi sier at f er en **jevn funksjon** hvis

$$f(-x) = f(x) \quad \text{for enhver } x \text{ i definisjonsmengden til } f.$$

Vi sier at f er en **odde funksjon** hvis

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{for enhver } x \text{ i definisjonsmengden til } f.$$

Hvilken funksjon f , definert for hele den reelle linjen $\mathbb{R}$, er både jevn og odd?

Ordbok (Norsk – Engelsk): Jevn – Even, Odde – Odd.

- 7 La $f(x) = \frac{2}{x}$ og $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Finn uttrykk for de følgende komposisjonsfunksjonene og spesifiser de naturlige definisjonsmengdene deres.

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

- 8 Uttrykk $(\cos(3x))$ ved $(\sin(x))$ og $(\cos(x))$.

Hint: Begynn med $3x = 2x + x$, og bruk summeformelen for cosinus.

- 9 Tangensfunksjonen er definert som

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

Hvor $x \in \mathbb{R}$ og $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Finn den maksimale definisjonsmengden til følgende funksjon og bevis identiteten

$$\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Hint: $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$