

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Øving 3
Høst 2023**Innleveringsfrist:** Mandag 18. September

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

- 1 Hvilke av følgene under er nedad/oppad begrenset (angi en begrensning) og/eller voksende/avtakende? *Gi et argument.*

a) $(x_n)_{n \geq 1} = (n)_{n \geq 1}$

b) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

c) $(1, -1, 1, -2, 1, -3, 1, \dots)$

d) Følgen $(x_n)_n$ er gitt ved

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1.$$

Hint: Følgen er konvergent med $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

- 2 Finn supremum, infimum og grenseverdien til følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gitt ved $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
Bruk definisjonene til å vise dette rigorøst.

- 3 Beregn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x}$

- 4 Beregn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$

- 5 Bruk ε/δ (epsilon-delta-definisjonen) til å verifisere de angitte grenseverdiene.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+2) = 4$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

6 Gitt en funksjon f definert av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

bestem hvor i (den naturlige) definisjonsmengden den er kontinuert, og hvor den ikke er kontinuert.

7 Bestem verdien av k slik at

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \leq 3 \\ k - x^2 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

definerer en kontinuert funksjon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

8 Bevis at hvis det er to grenseverdier a og b til den samme reelle følgen $(x_n)_n$, så er $a = b$.

Med andre ord: Vis at grensebegrepet er entydig.