

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 3

Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 18. September

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1 Hvilke av følgene under er nedad/oppad begrenset (angi en begrensning) og/eller voksende/avtakende? *Gi et argument.*

a) $(x_n)_{n \geq 1} = (n)_{n \geq 1}$

b) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

c) $(1, -1, 1, -2, 1, -3, 1, \dots)$

d) Følgen $(x_n)_n$ er gitt ved

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1.$$

Hint: Følgen er konvergent med $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Løsning: Oppgave 1

En kjapp repetisjon av begreper:

- En følge $(x_n)_n$ er **nedad begrenset** (bounded below) av L dersom $x_n \geq L$ for alle $n \geq 1$; L er en **nedre grense** for $(x_n)_n$.
- En følge $(x_n)_n$ er **oppad begrenset** (bounded above) av M dersom $x_n \leq M$ for alle $n \geq 1$; M er en **øvre grense** for $(x_n)_n$.
- En følge $(x_n)_n$ er **begrenset** dersom den er både nedad og oppad begrenset.
- En følge $(x_n)_n$ er **voksende** (increasing) hvis $x_{n+1} \geq x_n$ for alle $n \geq 1$. Den er **avtagende** (decreasing) hvis $x_{n+1} \leq x_n$ for alle $n \geq 1$.

a) $(x_n)_{n \geq 1} = (n)_{n \geq 1} = (1, 2, 3, \dots)$:

Begrenset: Vi har $1 \leq n \leq x_n$, så følgen er nedad begrenset av 1. Følgen er ikke oppad begrenset siden det ikke finnes en øvre grense; La M være en potensiell øvre grense, og $\lceil M \rceil$ være minste heltall som ikke er mindre enn M . Da har vi

$$x_{\lceil M \rceil + 1} = \lceil M \rceil + 1 \geq M + 1 > M.$$

Altså kan ikke M være en øvre grense likevel.

Voksende/Avtagende: Vi har

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - n = 1 > 0 \implies x_{n+1} > x_n$$

for alle $n \geq 1$, så $(x_n)_{n \geq 1}$ er en (strengt) voksende følge.

b) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$:

Begrenset: Følgen er oppad og nedad begrenset av 1.

Voksende/Avtagende: Vi har

$$x_{n+1} - x_n = 1 - 1 = 0 \implies x_{n+1} \geq x_n \text{ og } x_{n+1} \leq x_n$$

for alle $n \geq 1$, så følgen er både voksende og avtagende.

c) $(1, -1, 1, -2, 1, -3, 1, \dots)$:

Begrenset: Følgen er oppad begrenset av 1. Den er ikke nedad begrenset ved liknende argument som i a).

Voksende/Avtagende: Vi ser at $x_2 - x_1 = -1 - 1 = -2 < 0$ så følgen er ikke voksende, og $x_3 - x_2 = 1 - (-1) = 2 > 0$ så følgen er heller ikke avtagende. Mer generelt ser vi at følgen er alternerende, så den kan verken være voksende eller avtagende.

d)

Mulig hint til studentene: Sjekk hvordan tilsvarende eksempel ([Eksempel 2.2.4 s. 59](#)) er løst i boken.

Begrenset: For alle $n \geq 0$, ser vi at $x_n \geq \sqrt{2}$, så følgen er nedad begrenset av $\sqrt{2}$.

Vi bruker så induksjon for å vise at følgen er oppad begrenset av 2.

Steg 1: $x_1 = \sqrt{2} < 2$ er sant.

Steg 2: Anta nå at $x_k < 2$ for en $k \geq 1$. Da har vi $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$, som er det vi trengte vise.

Altså er følgen oppad begrenset av 2.

Voksende/Avtagende: Vi bruker igjen induksjon til å vise at følgen er (strengt) voksende.

Steg 1: $x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$, altså $x_2 > x_1$.

Steg 2: Funksjonen $f(x) = \sqrt{2 + x}$ er voksende, dvs. $x < y$ impliserer $f(x) < f(y)$. Videre er $f(x_k) = x_{k+1}$. For induksjonssteget, anta $x_k < x_{k-1}$ for $k \geq 2$. Vi har da

$$\begin{aligned} x_k &< x_{k-1} \\ \implies f(x_k) &< f(x_{k-1}) \\ \implies x_{k+1} &< x_k \end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise.

Altså er følgen (strengt) voksende.

- 2 Finn supremum, infimum og grenseverdien til følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gitt ved $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
Bruk definisjonene til å vise dette rigorøst.

Løsning: Oppgave 2

Vi repeterer begrepene supremum og infimum.

Repetisjon: (Definisjon I s.8)

La U være en delmengde av $\mathbb{R}$.

$\sup U \stackrel{\text{def}}{=} \text{minste øvre begrensning av } U \text{ (hvis en slik fins)}$

$\inf U \stackrel{\text{def}}{=} \text{største nedre begrensning av } U \text{ (hvis en slik fins)}$

Tallet $\sup U$ kalles **supremum** til U , og $\inf U$ kalles **infimum** til U .

Vi begynner med supremum. Det er tydelig at $\frac{1}{2}$ er en øvre begrensning av følgen, dvs.

$$\frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Vi påstår at dette er supremum, og for å vise det må vi vise at for enhver annen øvre begrensning M , så er $\frac{1}{2} \leq M$. La derfor $M > 0$ være en øvre begrensning av $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vi antar med mål om motsigelse at $M < \frac{1}{2}$. Bruker vi nå at M er en øvre begrensning så må

$$\frac{(-1)^n}{n} \leq M \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Spesielt for $n = 2$, får vi $\frac{1}{2} \leq M < \frac{1}{2}$. Ett tall kan ikke være ekte mindre enn seg selv, så vi har nådd en motsigelse. Hva er motsagt? Jo, antagelsen om at $M < \frac{1}{2}$. Eneste gjenstående mulighet er dermed at $\frac{1}{2} \leq M$, som var det vi ønsket å vise.

Vi ser nå på infimum. Også her har vi en klar nedre begrensning i -1 . Dette påstår vi er infimum, og vi går frem på samme måte som for supremum. Anta at m er en nedre begrensning. Vi vil vise at $m \leq -1$, så vi antar med mål om motsigelse det motsatte; nemlig $m > -1$. Lar vi $n = 1$, ser vi at

$$-1 = \frac{-1}{1} \geq m > -1$$

som ikke kan stemme. Dermed må vi ha $m \leq -1$ og -1 er infimum.

Vi hevder at $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. For enhver $\varepsilon > 0$, ønsker vi å finne $N > 0$ slik at hvis $n > N$ så er

$$|x_n - 0| < \varepsilon.$$

Observer at

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

så om vi lar $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ ($\lfloor x \rfloor$ står for det største heltallet mindre enn eller lik x) og merk deg at $\lfloor x \rfloor + 1 > x$, når $n \geq N$, vi har

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

som viser at $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3 Beregn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x}$

Løsning: Oppgave 3

a)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0.$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

Grensen eksisterer ikke; når x går mot 2 så vil $x-2$ gå mot 0 i nevneren.

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x-1)^2 - (3x+1)^2}{x(|3x-1| + |3x+1|)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-12x}{x(|3x-1| + |3x+1|)} \\ &= \frac{-12}{1+1} = -6. \end{aligned}$$

4 Beregn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$

Løsning: Oppgave 4

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ does not exist; $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ takes the values -1 and 1 in any interval $(-\delta, \delta)$, where $\delta > 0$, and limits, if they exist, must be unique.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ by the squeeze theorem, since

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \quad \text{for all } x \neq 0$$

and $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

5) Bruk ε/δ (epsilon-delta-definisjonen) til å verifisere de angitte grenseverdiene.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 2) = 4$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Løsning: Oppgave 5**Repetisjon: ε/δ -Grenseverdi av funksjon**

Vi sier at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ hvis det for hvert positive reelle tall ε eksisterer et positivt reelt tall δ , avhengig av ε , slik at

$$0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

a) To be proved: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 2) = 4$.

Bevis. Let $\varepsilon > 0$ be given. Then $|(2x + 2) - 4| < \varepsilon$ holds if $2|x - 1| < \varepsilon$, and so if $|x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$. This confirms the limit. $\square$

b) To be proved: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

Bevis. Let $\varepsilon > 0$ be given. Then $|x^2 - 0| < \varepsilon$ holds if $|x - 0| = |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$. This confirms the limit. $\square$

6) Gitt en funksjon f definert av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

bestem hvor i (den naturlige) definisjonsmengden den er kontinuert, og hvor den ikke er kontinuert.

Løsning: Oppgave 6

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ is continuous everywhere except at $x = 0$, since it does not have a real limit there.

7 Bestem verdien av k slik at

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \leq 3 \\ k - x^2 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

definerer en kontinuerlig funksjon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Løsning: Oppgave 7

$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = k - 9$ and $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 9 = f(3)$. Thus f will be continuous at $x = 3$ if $k - 9 = 9$, that is, if $k = 18$.

8 Bevis at hvis det er to grenseverdier a og b til den samme reelle følgen $(x_n)_n$, så er $a = b$.

Med andre ord: Vis at grensebegrepet er entydig.

Løsning: Oppgave 8

Bevis. Proof by contradiction. Assume $a \neq b$.

Choose $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - b|$ which is greater than zero since $a \neq b$. Since a is a limit of $(x_n)_n$ we can apply the definition of limit with our choice of ε to find $N_1 \in \mathbb{N}$ such that

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{for all } n \geq N_1.$$

Similarly, as b is a limit of $(x_n)_n$ we can apply the definition of limit with our choice of ε to find $N_2 \in \mathbb{N}$ such that

$$|x_n - b| < \varepsilon \quad \text{for all } n \geq N_2.$$

Choose any $m_0 > \max(N_1, N_2)$, then $|x_{m_0} - a| < \varepsilon$ and $|x_{m_0} - b| < \varepsilon$. Using the Triangle inequality, we have

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a - x_{m_0} + x_{m_0} - b| \\ &\leq |a - x_{m_0}| + |x_{m_0} - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a - b|, \end{aligned}$$

so we find that $|a - b|$, which is not zero, satisfies $|a - b| < \frac{2}{3}|a - b|$, which is a contradiction.

Hence our assumption $a \neq b$ must be false. Finally, we get $a = b$. □