

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Øving 4
Høst 2024**Innleveringsfrist:** Mandag 23. September

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1 Beregn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin(x)}{x^2 + \cos(x)}$, *Hint: Del teller og nevner på x^2 og bruk skviseteoremet.*

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}$

2 La f være en odde funksjon slik at $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$, vis at $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -L$.

3 Verifiser de oppgitte grenseverdiene ved å bruke

a) ϵ/δ -definisjonen for grenseverdier av funksjoner: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$.

b) ϵ/N -definisjonen for grenseverdier av følger: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$.

4 Finn en kontinuerlig funksjon f med maksimalverdi $M = 3$ og minimalverdi $m = -2$ på intervallet $I = (-2, 2)$.

Tror du en slik funksjon må ha en nullverdi i intervallet I ? Forklar med ord (Bevis er ikke nødvendig).

5 Finn en funksjon $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som er høyre-kontinuerlig i $x = 1$, kontinuerlig i $x = 0$ og ikke kontinuerlig i $x = 3$.

6 Vis ved hjelp av skvisteoremet at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) \sin(\tan(x)), & \text{for } x \neq \pi/2 \\ 0, & \text{for } x = \pi/2 \end{cases}$$

er kontinuertlig i $x = \frac{\pi}{2}$.

Hint: En mulig innfallsvinkel er å huske at

$$-|g(x)| \leq g(x) \leq |g(x)|.$$

- 7** a) Vis at funksjonen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = |x|$ er kontinuertlig.
- b) La $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en reell funksjon. Bevis at hvis f er kontinuertlig i a så er også $|f|$ kontinuertlig i a .

- 8** Vi ser på en følge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ og lar $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ være en delfølge av denne. Vis at hvis $\{x_n\}$ har grenseverdi L , så har også $\{y_k\}$ grenseverdi L .

Hint: Husk at indeksene til underfølgen er voksende i den forstand at hvis $y_n = x_{k(n)}$ så er $k(1) < k(2) < \dots$.