NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 4

Høst 2024

Innleveringsfrist: Mandag 23. September
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

$\boxed{1}$ Beregn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2+\cos(x)}$, *Hint: Del teller og nevner på x^2 og bruk skviseteoremet.*

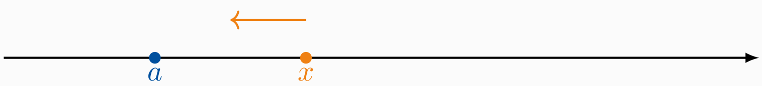
d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}$

Løsning: Oppgave 1

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{x-a}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}.$

For å løse opp absoluttverdien har vi observert at vi beregner høyre grenseverdi. Det vil da si at x nærmer seg a fra høyre, og dermed $x > a$. Vi har generelt at hvis $b > c$ så er $|b-c| = b-c > 0$.



c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2+\cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin(x)}{x^2}}{1+\frac{\cos(x)}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$

Vi har her brukt skviseteoremet til å skvise

$$\frac{\sin(x)}{x^2}$$

mellom

$$h(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(og tilsvarende for cosinus), når $x \to \infty$.

d) For $x > 1$ er begge leddene i uttrykket definerte og positive. Vi får da

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}\right)\cdot 1 \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3-(x^4-x^3)}{\sqrt{x^4+x^3}+\sqrt{x^4-x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2} = \infty.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ La f være en odde funksjon slik at $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, vis at $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -L$.

Løsning: Oppgave 2

Hvis f er en odde funksjon, så må $f(-x) = -f(x)$. Altså,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0^-} f(-x) = -\lim_{x\to 0+} f(x) = -L.$$

Hvis vi ikke tenker oss om her kan vi gå i fellen å tenke at L nødvendigvis må være 0, noe som stemmer hvis f er kontinuerlig. Vi kan konstruere en odde funksjon som ikke er kontinuerlig i $x = 0$, for eksempel

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ -5, & \text{if } x < 0 \end{cases}.$$

$\boxed{3}$ Verifiser de oppgitte grenseverdiene ved å bruke

a) ϵ/δ-definisjonen for grenseverdier av funksjoner: $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$.

b) ε/N-definisjonen for grenseverdier av følger: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$.

Løsning: Oppgave 3

a) To be proved: $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$.

Bevis. Let $\varepsilon > 0$ be given. If $x \neq -1$, we have

$$\left|\frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{x-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{|x+1|}{2|x-1|}.$$

If $|x+1| < 1$, then $-2 < x < 0$, so $-3 < x-1 < -1$ and $|x-1| > 1$. Let $\delta = \min(1, 2\varepsilon)$. If $0 < |x-(-1)| < \delta$, then $|x-1| > 1$ and $|x+1| < 2\varepsilon$. Thus,

$$\left|\frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{|x+1|}{2|x-1|} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

This completes the required proof. □

b) To be proved: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$.

Bevis. By the ε/N-definistion of a limit we need to show the following. For each $\varepsilon > 0$ we can find a $N \in \mathbb{N}$ such that

$$n \geq N \implies \left|\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \varepsilon.$$

Now using the fact that $\sqrt{n^2+1} \geq n$ we get

$$n \geq N \implies \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}.$$

From the solution to 2b) of exercise set 2, we know that we can choose $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ to get

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

□

4 Finn en kontinuerlig funksjon f med maksimalverdi $M = 3$ og minimalverdi $m = -2$ på intervallet $I = (-2, 2)$.

Tror du en slik funksjon må ha en nullverdi i intervallet I? Forklar med ord (Bevis er ikke nødvendig).

Løsning: Oppgave 4

Since I is an open interval, the maximum and minimum can not be attained on the boundary of I. They should be attained in the inner part of I. The answer is not unique. Here we only give an example.

Consider

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{if } -2 < x < -1 \\ -3x & \text{if } -1 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x - \frac{8}{3} & \text{if } \frac{2}{3} < x < 2. \end{cases}$$

Clearly, f is continuous on I and achieves its maximum at $x = -1$ and minimum at $x = \frac{2}{3}$.

For any function f satisfying the conditions, since maximum and minimum are attained in the inner part of I, we can without loss of generality find a, b such that $a < b$, $f(a) = -2$ and $f(b) = 3$. Now f is continuous on $[a, b]$.

Since f varies continuously between its minimum and maximum, it must take each value between m and M of which 0 is one. Formally, this follows from the intermediate value theorem.

$\boxed{5}$ Finn en funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er høyre-kontinuerlig i $x = 1$, kontinuerlig i $x = 0$ og ikke kontinuerlig i $x = 3$.

Løsning: Oppgave 5

The answer is not unique. Here we only give an example.

Consider

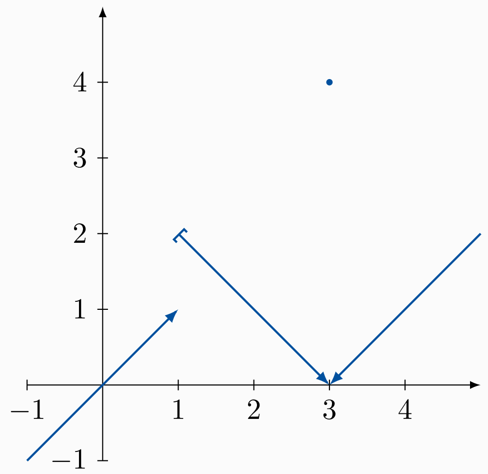
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 1 \\ -x+3 & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{if } x = 3 \\ x-3 & \text{if } x > 3. \end{cases}$$

At $x = 0$, $f(x) = x$ is continuous.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1$, and $f(1) = 2$, so $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) \neq f(1)$, which means f is not left continuous at $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2 = f(1)$, so f is right continuous at $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 3+} f(x)$, and $f(3) = 4$, so at $x = 3$, the left and right limit exist and are equal, but they are not equal to the function value at this point, which means f is not continuous at $x = 3$.



6 Vis ved hjelp av skvisteoremet at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x)\sin(\tan(x)), & \text{for } x \neq \pi/2 \\ 0, & \text{for } x = \pi/2 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = \frac{\pi}{2}$.

Hint: En mulig innfallsvinkel er å huske at

$$-|g(x)| \leq g(x) \leq |g(x)|.$$

Løsning: Oppgave 6

Vi observerer at $\lim_{x\to\pi/2}|\cos(x)| = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, samt at

$$-1 \leq \sin(\tan(x)) \leq 1 \quad \forall \quad x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi k$$

og

$$-|\cos(x)| \leq \cos(x) \leq |\cos(x)|.$$

Sammen gir dette oss at

$$-|\cos(x)| \leq \cos(x)\sin(\tan(x)) \leq |\cos(x)| \quad \forall \quad x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi k$$

og dermed må

$$\lim_{x\to\pi/2} \cos(x)\sin(\tan(x)) = 0$$

ved skvisteoremet.

7 **a)** Vis at funksjonen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = |x|$ er kontinuerlig.

b) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en reell funksjon. Bevis at hvis f er kontinuerlig i a så er også $|f|$ kontinuerlig i a.

Løsning: Oppgave 7

a)

Bevis. Given any $\varepsilon > 0$, choose a $\delta < \varepsilon$, and fix a point $a \in \mathbb{R}$. Then g is continuous at a since

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &= \Big| |x| - |a| \Big| \\ &\leq |x - a| \\ &< \delta \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

where we have used the reverse triangle inequality in the second line. □

b) Since we have already shown in a) that $g(x) = |x|$ is continuous, we simply need to use the fact the composition of two continous functions is continuous. Then since f is assumed to be continuous we get that $|f| = g \circ f$ is continuous.

$\boxed{8}$ Vi ser på en følge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ og lar $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en delfølge av denne. Vis at hvis $\{x_n\}$ har grenseverdi L, så har også $\{y_k\}$ grenseverdi L.

Hint: Husk at indeksene til underfølgen er voksende i den forstand at hvis $y_n = x_{k(n)}$ så er $k(1) < k(2) < \cdots$.

Løsning: Oppgave 8

For any $\varepsilon > 0$, we can find a $N > 0$ such that $j > N$ implies that $|x_j - L| < \varepsilon$ since $x_n \to L$. Now we claim that it also holds that $|y_j - L| < \varepsilon$. Indeed, $y_j = x_{k(j)}$ and $k(j) > N$ by the monotonicity of the indices of a subsequence as detailed in the hint. Consequently, $k(j) > N$ and $|y_j - L| = |x_{k(j)} - L| < \varepsilon$.