

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Øving 5
Høst 2024**Innleveringsfrist:** Mandag 30. September

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1 Finn likningene på formen $y = kx + m$ for tangenten i punktet x_0 til

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 9$

b) $y = \frac{1}{x^2+1}, \quad x_0 = 0.$

2 Skriv ned hva du tenker er en fornuftig definisjon for

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

3 I denne oppgaven viser vi at hvis $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, tilfredstiller $f(x) > 0$ for alle $x \geq 0$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, så oppnår f sitt maksimum.

a) Vis at for alle $x_0 > 0$ kan vi finne $K > 0$ slik at

$$x > K \implies f(x) < f(x_0).$$

b) Rettferdigjør hvorfor dette betyr at

$$\sup_{x \geq 0} f(x) = \sup_{0 \leq x \leq K} f(x).$$

c) Bruk ekstermalverditeoremet for å konkludere med at

$$\sup_{x \geq 0} f(x) = \max_{0 \leq x \leq K} f(x).$$

4 Regn ut, ved hjelp av definisjonen, den deriverte til følgende funksjoner

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + 4x - 5x^2$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \frac{1}{x}$

c) $h: (-1, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$

Bestem også den maksimale naturlige definisjonsmengden til funksjonene f', g' og h' .

- 5 Vis at kurven $y = x^2$ og den rette linjen $x + 4y = 18$ skjærer hverandre med en rett vinkel i ett av deres to skjæringspunkt.

Hint: To linjer skjærer hverandre med rett vinkel hvis produktet av stigningstallet deres er -1 .

- 6 Bruk faktorisering av kubisk differanse

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

til å vise at

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0,$$

ved hjelp av definisjonen til den deriverte.

- 7 Bruk skjæringssetningen til å vise at polynomet

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 3$$

har i det minste 3 nullpunkter.

- 8 Anta $f(x)$ er kontinuert i $x = 0$. For de følgende påstandene, hvis sant, gi et argument; hvis usant, gi et moteksempel.

a) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ eksisterer, så er $f(0) = 0$.

b) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ eksisterer, så er $f(0) = 0$.

c) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ eksisterer, så eksisterer $f'(0)$.

d) Hvis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ eksisterer, så eksisterer $f'(0)$.