MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 5

Høst 2024

Innleveringsfrist: Mandag 30. September
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

$\boxed{1}$ Finn likningene på formen $y = kx + m$ for tangenten i punktet x_0 til

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 9$

b) $y = \frac{1}{x^2+1}, \quad x_0 = 0.$

Løsning: Oppgave 1

a) The slope of $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ at $x_0 = 9$ is

$$\begin{aligned} k &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{\sqrt{9+h}} - \frac{1}{3}\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3-\sqrt{9+h}}{3h\sqrt{9+h}} \cdot \frac{3+\sqrt{9+h}}{3+\sqrt{9+h}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{9-9-h}{3h\sqrt{9+h}(3+\sqrt{9+h})} \\ &= -\frac{1}{54}. \end{aligned}$$

The tangent line at $(9, \frac{1}{3})$ is $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{54}(x-9)$, i.e. $y = -\frac{1}{54}x + \frac{1}{2}$.

b) The slope of $y = \frac{1}{x^2+1}$ at $x_0 = 0$ is

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{h^2+1} - 1\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h^2+1} = 0.$$

The tangent line at $(0, 1)$ is $y = 1$.

$\boxed{2}$ Skriv ned hva du tenker er en fornuftig definisjon for

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Løsning: Oppgave 2

For each $M > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that

$$a - \delta < x < a \implies f(x) < -M.$$

$\boxed{3}$ I denne oppgaven viser vi at hvis $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, tilfredstiller $f(x) > 0$ for alle $x \geq 0$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, så oppnår f sitt maksimum.

a) Vis at for alle $x_0 > 0$ kan vi finne $K > 0$ slik at

$$x > K \implies f(x) < f(x_0).$$

b) Rettferdigjør hvorfor dette betyr at

$$\sup_{x\geq 0} f(x) = \sup_{0\leq x\leq K} f(x).$$

c) Bruk ekstermalverditeoremet for å konkludere med at

$$\sup_{x\geq 0} f(x) = \max_{0\leq x\leq K} f(x).$$

Løsning: Oppgave 3

a)
Since $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, we can for any $\varepsilon > 0$ find a K such that $|f(x)| < \varepsilon$ for $x > K$. In particular, since $f(x) > 0$ for all x, we have that if $x_0 > 0$, $f(x_0) > 0$ and we can set $\varepsilon = f(x_0)$ to obtain the desired K. That $f(x) < \varepsilon = f(x_0)$ for $x > K$.

b)
We have that

$$\sup_{x\geq 0} f(x) = \max\left\{ \underbrace{\sup_{0\leq x\leq K} f(x)}_{\geq f(x_0)}, \underbrace{\sup_{K<x<\infty} f(x)\}}_{<f(x_0)} \right\}$$

by **a)**.

c)
The extreme value theorem says that a continuous function on a compact domain attains its maximum. Since $[0, K]$ is compact we apply it and get

$$\sup_{x\geq 0} f(x) = \sup_{0\leq x\leq K} f(x) = \max_{0\leq x\leq K} f(x)$$

as desired.

$\boxed{4}$ Regn ut, ved hjelp av definisjonen, den deriverte til følgende funksjoner

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 1 + 4x - 5x^2$

b) $g\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x + \frac{1}{x}$

c) $h\colon (-1,\infty) \to (0,\infty), \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Bestem også den maksimale naturlige definisjonsmengden til funksjonene f', g' og h'.

Løsning: Oppgave 4

a)

$$\begin{aligned}
f(x) =& 1 + 4x - 5x^2. \\
f'(x) =& \lim_{h\to 0} \frac{1 + 4(x+h) - 5(x+h)^2 - (1 + 4x - 5x^2)}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{4h - 10xh - 5h^2}{h} = 4 - 10x.
\end{aligned}$$

The maximal domain is $x \in \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned}
g(x) =& x + \frac{1}{x}. \\
g'(x) =& \lim_{h\to 0} \frac{x + h + \frac{1}{x+h} - x - \frac{1}{x}}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{x - x - h}{h(x+h)x}\right) \\
=& 1 + \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = 1 - \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

The maximal domain is $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

c)

$$\begin{aligned}
h(x) =& \frac{1}{\sqrt{1+x}}. \\
h'(x) =& \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x+h}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x+h}}{h\sqrt{1+x+h}\sqrt{1+x}} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{1 + x - 1 - x - h}{h\sqrt{1+x+h}\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+h})} \\
=& \lim_{h\to 0} -\frac{1}{\sqrt{1+x+h}\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+h})} \\
=& -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

The maximal domain is $x > -1$.

$\boxed{5}$ Vis at kurven $y = x^2$ og den rette linjen $x + 4y = 18$ skjærer hverandre med en rett vinkel i ett av deres to skjæringspunkt.

Hint: To linjer skjærer hverandre med rett vinkel hvis produktet av stigningstallet deres er -1.

Løsning: Oppgave 5

The intersection points of $y = x^2$ and $x + 4y = 18$ satisfy

$$\begin{aligned} 4x^2 + x - 18 =& 0 \\ (4x + 9)(x - 2) =& 0. \end{aligned}$$

Therefore $x = -\frac{9}{4}$ or $x = 2$.

The slope of $y = x^2$ is $k_1 = 2x$.

At $x = -\frac{9}{4}$, $k_1 = -\frac{9}{2}$. At $x = 2$, $k_1 = 4$.

The slope of $x + 4y = 18$, i.e. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{18}{4}$, is $k_2 = -\frac{1}{4}$.

Thus, at $x = 2$, the product of these slopes is $4 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1$. So, the curve and line intersect at right angles at that point.

$\boxed{6}$ Bruk faktorisering av kubisk differanse

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

til å vise at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0,$$

ved hjelp av definisjonen til den deriverte.

Løsning: Oppgave 6

$$
\begin{aligned}
f(x) =& x^{\frac{1}{3}}. \\
f'(x) =& \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \\
& \times \frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h[(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}]} \\
=& \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\
=& \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0.
\end{aligned}
$$

$\boxed{7}$ Bruk skjæringssetningen til å vise at polynomet

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 3$$

har i det minste 3 nullpunkter.

Løsning: Oppgave 7

Gitt en kontinuerlig funksjon f, som f.eks. et polynom, og to punkter $a < b$ slik at $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellige fortegn, sier skjæringssetningen at f har minst et nullpunkt i intervallet (a, b).

Dersom vi da kan finne 4 punkter $a < b < c < d$ slik at $p(x)$ har alternerende fortegn i disse punktene, vet vi at funksjonen har minst 3 nullpunkter. Et i intervallet (a, b), et annet i intervallet (b, c) og et siste i intervallet (c, d). Ved innsetting kan vi se at vi oppnår dette ved f.eks. å velge $a = -2, b = -1, c = 2, d = 4$, siden vi da har

$$f(a) = -7,\ f(b) = 3, f(c) = -3, f(d) = 23.$$

$\boxed{8}$ Anta $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$. For de følgende påstandene, hvis sant, gi et argument; hvis usant, gi et moteksempel.

a) Hvis $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ eksisterer, så er $f(0) = 0$.

b) Hvis $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ eksisterer, så er $f(0) = 0$.

c) Hvis $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ eksister, så eksisterer $f'(0)$.

d) Hvis $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ eksisterer, så eksisterer $f'(0)$.

Løsning: Oppgave 8

In **a)** and **b)**, since the limitation of denominator is 0, so the limit of numerator must also be 0, then we have $f(0) = 0$. Thus **a)** and **b)** are TRUE.

In **c)**, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ exists, then $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$, so $f'(0)$ exists. **c)** is TRUE.

In **d)**, take $f(x) = |x|$, then

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0,$$

but $f(x)$ is not differentiable at $x = 0$. So **d)** is FALSE.