NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Øving 6

Høst 2024

Innleveringsfrist: Mandag 6. Oktober
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1 La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, være en funksjon gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{a + bx},$$

hvor $a \neq 0$, $b \neq 0$.

a) Finn $\dfrac{\mathrm{d}^3}{(\mathrm{d}x)^3} f(x) = f'''(x)$.

b) Gjett på en generell formel for $\dfrac{d^n}{(dx)^n} f(x) = f^{(n)}(x)$.

c) (Utfordring) Bevis gjettet ditt.

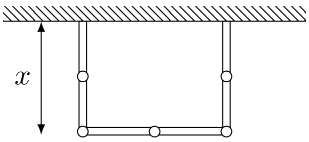
2 Finn

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2 + x^3)^{\frac{1}{3}}$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\Big(2 - 3f(4 - 5t)\Big)$, $\quad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en vilkårlig deriverbar funksjon

c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 1}\right)\Big|_{x=-2}$

3 Anta at du skal lage en rektangulær innhegning for en hest. Den ene siden av innhegningen utgjøres av en flat låvevegg. Du har 40 meter gjerde som skal dekke de tre andre sidene. Hvordan skal målene på innhegningen velges for at arealet skal bli størst mulig?



Figur: Illustrasjon av låvevegg med innhegning.

4 Vis at

$$\sin(2x) > x \quad \text{når} \quad 0 < x < \frac{\pi}{8}.$$

Bevis det analytisk og ikke grafisk.

Utfordring: Kan du bevise det ved hjelp av middelverdisetningen?

$\boxed{5}$ Finn verdier for a og b som gjør

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ 2\sin(x) + 3\cos(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

deriverbar i $x = 0$.

$\boxed{6}$ Vis at funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gitt ved $f(x) = x^3$ er strengt voksende på hele den reelle linjen, selv om $f'(x)$ ikke er positiv for alle x.

$\boxed{7}$ Vi definerer

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi, \pi)$$

som den inverse funksjonen til tangens

$$\tan : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}.$$

Vis at

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

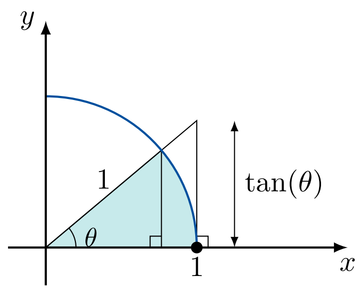
Hint: Du kan bruke den trigonometriske identiteten $\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$.

$\boxed{8}$ I Teorem 2.14.2 finner boken at $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ ved hjelp av blant annet grenseverdien

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

I denne oppgaven skal vi vise at denne grenseverdien er korrekt.

La $\theta \in (0, \pi/2)$. Betrakt figuren under



a) Begrunn at arealet til det skraverte området (sirkelsektoren med radius 1 og vinkel θ) har areal

$$(\pi \cdot 1^2) \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2}.$$

b) Bruk at (areal liten trekant)$\leq$ skravert areal $\leq$ (areal stor trekant) til å vise at

$$\cos(\theta) \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

c) Vis at $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$.

9 La $h(x) = x^3 + 2x + 2$. Vis at h har en invers funksjon h^{-1} og finn $(h^{-1})'(2)$.