

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 6

Høst 2024

Innleveringsfrist: Mandag 6. Oktober

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1 La $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, være en funksjon gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{a + bx},$$

hvor $a \neq 0$, $b \neq 0$.

a) Finn $\frac{d^3}{(dx)^3} f(x) = f'''(x)$.

b) Gjett på en generell formel for $\frac{d^n}{(dx)^n} f(x) = f^{(n)}(x)$.

c) (Utfordring) Bevis gjettet ditt.

Løsning: Oppgave 1

a) Vi benytter oss av kjerneregelen repetativt. Husk at

$$f(x) = g(u(x)) \quad \text{gir} \quad f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Vi begynner med $f'(x)$, og ser at

$$f(x) = g(u(x)) \quad \text{hvor} \quad g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \text{og} \quad u(x) = a + bx.$$

Siden

$$g'(x) = \frac{d}{dx} x^{-1} = (-1) \cdot x^{-2} = (-1) \cdot \frac{1}{x}$$

og

$$u'(x) = \frac{d}{dx} (a + bx) = b$$

får vi at

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = (-1) \frac{1}{(u(x))^2} \cdot b = \frac{(-1)b}{(a + bx)^2}.$$

Nå skal vi finne $\frac{d}{dx} \left(\frac{(-1)b}{a + bx} \right)$. På grunn av produktregelen kan vi flytte konstantene i telleren utenfor, og se at vi skal finne

$$f''(x) = (-1)b \cdot \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(a + bx)^2} \right) \right] = (-1)b \cdot \left[\frac{d}{dx} (a + bx)^{-2} \right]$$

Kjerneregelen gir oss (siden $(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ for alle heltall $n \neq 0$) at

$$f''(x) = (-1)b \cdot [(-2) \cdot (a + bx)^{-3} \cdot b] = (-1)(-2)b^2 \frac{1}{(a + bx)^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 2 \cdot b^2}{(a + bx)^3}$$

Kjerneregelen en siste gang gir oss

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)b^3}{(a + bx)^4} = \frac{(-1)^3 \cdot 3! \cdot b^3}{(a + bx)^4}$$

b) Vårt gjett kommer av at vi har sett litt nøye på hva vi fikk i hvert steg over. Vi ser at formelen

$$\frac{d^n}{(dx)^n} f(x) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot b^n}{(a + bx)^{n+1}}$$

i alle fall er korrekt for $n = 1, 2, 3$. Så det later til å være et greit gjett.

c) Vi har blitt utfordret til å bevise gjettet vårt. For forfatter skriker det induksjonsbevis for denne formelen, så vi prøver oss på det.

Grunnsteg ($n = 1$):

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(-1)^1 \cdot 1! \cdot b^1}{(a + bx)^{1+1}},$$

stemmer som vi allerede har observert. ✓.

Induksjonshypotesen ($n = k$): Vi antar at

$$\frac{d^k}{(dx)^k} f(x) = \frac{(-1)^k \cdot k! \cdot b^k}{(a + bx)^{k+1}}$$

stemmer.

Siste steg ($n = k + 1$): Nå regner vi ut hva $\frac{d^{k+1}}{(dx)^{k+2}} f(x)$ vil være gitt at antagelsen vår stemmer. Altså

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{(dx)^{k+2}} f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k}{(dx)^k} f(x) \right) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{d}{dx} \left(\frac{(-1)^k \cdot k! \cdot b^k}{(a + bx)^{k+1}} \right) \\ &= (-1)^k \cdot k! \cdot b^k \cdot \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(a + bx)^{k+1}} \right) \right] \\ &= (-1)^k \cdot k! \cdot b^k \cdot \left[(-(k+1)) \cdot \frac{1}{(a + bx)^{(k+1)+1}} \cdot b \right] \\ &= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot b^{k+1} \cdot \frac{1}{(a + bx)^{k+2}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot b^{k+1}}{(a + bx)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Som var det vi ville vise. Induksjonshypotesen ble brukt i overgangen markert med asteriks.

2 Finn

- a) $\frac{d}{dx}(2+x^3)^{\frac{1}{3}}$
- b) $\frac{d}{dt}f(2-3f(4-5t))$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en vilkårlig deriverbar funksjon
- c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right)\Big|_{x=-2}$

Løsning: Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2+x^3)^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{3}(2+x^3)^{-\frac{2}{3}}(3x^2) \\ &= x^2(2+x^3)^{-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

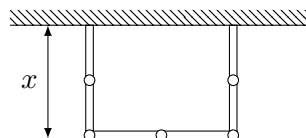
b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(2-3f(4-5t)) &= f'(2-3f(4-5t))(-3f'(4-5t))(-5) \\ &= 15f'(4-5t)f'(2-3f(4-5t)), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}\right)\Big|_{x=-2} &= \frac{(x^2+1)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}(2x)}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=-2} \\ &= \frac{2}{25\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

- 3 Anta at du skal lage en rektangulær innhegning for en hest. Den ene siden av innhegningen utgjøres av en flat låvevegg. Du har 40 meter gjerde som skal dekke de tre andre sidene. Hvordan skal målene på innhegningen velges for at arealet skal bli størst mulig?

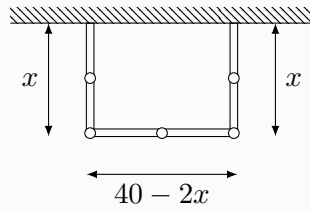


Figur: Illustrasjon av låvevegg med innhegning.

Løsning: Oppgave 3

Låveveggen gir oss en sidekant i rektangelet gratis. Vi har dermed 40 meter med gjerde til å dekke de tre andre sidekantene. To av sidene må nødvendigvis ha samme lengde,

x , for at det skal være et rektangel. Den siste siden må dermed ha lengde $40 - 2x$.



Figur: Illustrasjon av låvevegg med innhegning.

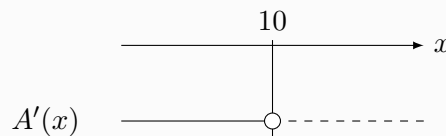
Arealet til innhegningen kan vi nå uttrykke som en funksjon av x :

$$A(x) = x \cdot (40 - 2x)$$

En sidekant i ett rektangel må ha positiv lengde, så vi ser at funksjonen er definert på intervallet $D_A = (0, 20)$. Vi deriverer for å finne kritiske punkter:

$$A'(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot (40 - 2x)) = 40 - 4x$$

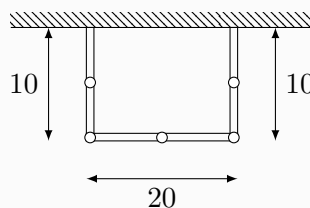
$A'(x)$ har nullpunkt i $x = 10$, så det er eneste kritisk punkt. Ved fortegnsskjema får vi at dette blir et maksimalpunkt.



Vi får altså maksimalt med areal ved å velge $x = 10$, og arealet er da

$$A(10) = 10 \cdot (40 - 2 \cdot 10) = 10 \cdot 20 = 200$$

kvadratmeter.



4 Vis at

$$\sin(2x) > x \quad \text{når} \quad 0 < x < \frac{\pi}{8}.$$

Bevis det analytisk og ikke grafisk.

Utfordring: Kan du bevise det ved hjelp av middelverdisetningen?

Løsning: Oppgave 4

We can look at the sign of the function $f(x) = \sin(2x) - x$. If $f(x) > 0$ for $0 < x < \frac{\pi}{8}$, we are done. We show this by noting that $f(0) = 0$ and proving that f is increasing on the interval. Indeed, the derivative of f satisfies

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 1.$$

On the interval $(0, \pi/8)$, $\cos(2x)$ is always larger than $\cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hence

$$f'(x) > 2\cos(\pi/4) - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0 \quad \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{8}$$

and we are done. Below is an alternative solution using the mean value theorem.

Teorem 2.7.4 – Middelverdisetningen

La f være kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b) . Da fins $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Vi lar $x \in (0, \pi/8)$, og ser på intervallene $[0, x]$.

$$\sin(2x) > x \Leftrightarrow \frac{\sin(2x)}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sin(2x) - \sin(0)}{x - 0} > 1$$

Nå, siden $\sin(2x)$ er kontinuerlig på $[0, \pi/8]$, og deriverbar på $(0, x)$, får vi fra middelverdisetningen at

$$\frac{\sin(2x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{d}{dt} \sin(2t) \Big|_{t=c} = 2\cos(2c)$$

for en $c \in (0, x)$. En lett omskriving gir oss

$$\sin(2x) = 2x \cdot \cos(2c)$$

Hvis vi nå kan vise at $\cos(2c) > \frac{1}{2}$ for alle $c \in (0, x) \subseteq (0, \frac{\pi}{8})$, er vi i mål. Vi kan se på at $\frac{d}{dx} \cos(2x) = -2\sin(2x)$ er negativ for alle $x \in (0, \pi/8)$, som betyr at $\cos(2x)$ er strengt avtagende på samme intervallet. Dermed må

$$\cos(2x) > \cos(2 \cdot \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2},$$

for alle $x \in (0, \pi/8)$. Spesielt vil $\cos(2c) > \frac{1}{2}$, og vi er ferdige.

5 Finn verdier for a og b som gjør

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ 2\sin(x) + 3\cos(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

deriverbar i $x = 0$.

Løsning: Oppgave 5

In order for f to be differentiable at $x = 0$, it first needs to be continuous at $x = 0$. For this we need

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \sin(x) + 3 \cos(x) \\ \iff b &= 3.\end{aligned}$$

Next recall that f being differentiable means that the limit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ exists which in particular means that the left and right limits need to agree, i.e.,

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}}_{= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + b - b}{x} = a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

For the left hand side we can compute the limit explicitly to be a as is done above while for the right hand side we note that this is the value at $x = 0$ of the derivative of the function $g(x) = 2 \sin(2x) + 3 \cos(x)$ which is 2. Hence we must have $a = 2$.

- 6 Vis at funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gitt ved $f(x) = x^3$ er strengt voksende på hele den reelle linjen, selv om $f'(x)$ ikke er positiv for alle x .

Løsning: Oppgave 6

$f(x) = x^3$ is increasing on $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$ because $f'(x) = 3x^2 > 0$ there. But $f(x_1) < f(0) = 0 < f(x_2)$ whenever $x_1 < 0 < x_2$, so f is also increasing on intervals containing the origin.

- 7 Vi definerer

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi)$$

som den inverse funksjonen til tangens

$$\tan: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Vis at

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Hint: Du kan bruke den trigonometriske identiteten $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Løsning: Oppgave 7

Vi bruker teoremet om den deriverte av inverse funksjoner (Teorem 1, s.98 i boken):

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Vi vet at $\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. (Kan f.eks. vises ved kvotientregelen). Vi kombinerer teoremet og hintet og får

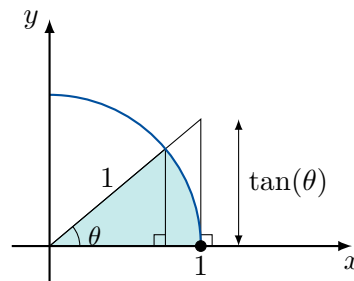
$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

8 I Teorem 2.14.2 finner boken at $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ ved hjelp av blant annet grenseverdien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

I denne oppgaven skal vi vise at denne grenseverdien er korrekt.

La $\theta \in (0, \pi/2)$. Betrakt figuren under



a) Begrunn at arealet til det skraverte området (sirkelsektoren med radius 1 og vinkel θ) har areal

$$(\pi \cdot 1^2) \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2}.$$

b) Bruk at (areal liten trekant) $\leq$ skravert areal $\leq$ (areal stor trekant) til å vise at

$$\cos(\theta) \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

c) Vis at $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$.

Løsning: Oppgave 8**a)**

The area of the whole unit circle is $1^2 \cdot \pi = \pi$. The portion of the circle which is shaded is precisely $\frac{\theta}{2\pi}$ hence the area of the shaded portion is

$$\pi \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2}.$$

b)

The smaller triangle has height $\sin(\theta)$ and length $\cos(\theta)$ and hence an area of $\frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{2}$. Meanwhile for the larger triangle, we have that the quotient of the height and width of the smaller and larger triangle is always $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$. For the larger triangle, the width is clearly 1 so we must have

$$\tan(\theta) = \frac{h}{1} = h$$

where h is the height. Hence the total area of the larger triangle must be $\frac{\tan(\theta) \cdot 1}{2} = \frac{\tan(\theta)}{2}$. This gives the inequalities

$$\frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan(\theta)}{2} \implies \cos(\theta) \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}$$

where we divided by $\frac{2}{\sin(\theta)}$.

c)

Now we can finish by applying the squeeze theorem to the above inequality and noting that both $\cos(\theta)$ and $\frac{1}{\cos(\theta)}$ go to 1 as $\theta \rightarrow 0$.

9 La $h(x) = x^3 + 2x + 2$. Vis at h har en invers funksjon h^{-1} og finn $(h^{-1})'(2)$.

Løsning: Oppgave 9

We know that a function has an inverse if it is bijective. We start by showing that h is injective. The derivative of h is given by

$$h'(x) = 3x^2 + 2,$$

so h is strictly increasing since $h' > 0$. Given $x_1 \neq x_2$ we can assume (without loss of generality) that $x_1 < x_2$ which implies $h(x_1) < h(x_2) \implies h(x_1) \neq h(x_2)$. So h is injective. We see that h is neither bounded from below or above, so since h is continuous (it's a polynomial) it must also be surjective.

In order to find $(h^{-1})'(2)$ we can use the inverse function theorem/inverse function rule:

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}.$$

We can easily see by inspection that $h^{-1}(2) = 0$ so we get

$$(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'(h^{-1}(2))} = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{2}$$