

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Øving 8

Høst 2024

Innleveringsfrist: Mandag 21. Oktober

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

- 1 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x.$$

Bestem det største intervallet $I = [a, b]$ slik at $1 \in I$ og f er injektiv på I .

- 2 Funksjonen f er definert for $x \geq -3$ som

$$f(x) = x^4 - b \cdot x^3 + 2.$$

For hvilke verdier av b er f injektiv?

- 3 Vis at funksjonene f under er injektive, og finn inversfunksjonen f^{-1} . Spesifiser definisjons- og verdimengden til f^{-1} .

a) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ for $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

- 4 Finn lineariseringen av

$$f(x) = \sqrt{3+x^2} \quad \text{i} \quad x = 1.$$

Hint: Dette er Taylorpolynomet av grad 1

- 5 Finn et uttrykk for det n 'te Taylorpolynomet, $T_n(x)$, til funksjonen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ rundt punktet $a = 0$. Hva skjer med dette polynomet når $x \geq 1$ og $n \rightarrow \infty$? Hvorfor motsier ikke dette Taylors teorem?

- 6 La $T_n(x)$ være det n 'te grads Taylorpolynomet til $f(x)$ rundt punktet $a = 0$. La $E_n(x)$ være den absolutte feilen til T_n i x . Altså $E_n(x) := |f_n(x) - T_n(x)|$. Finn en k slik at $E_k(1) \leq 10^{-1}$ og regn ut $T_k(1)$ dersom

a) $f(x) = 2x^2 + 2$.

b) $f(x) = \sin(x)$.

c) $f(x) = e^{2x}$.

- 7 La $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en uendelig ganger dervierbar funksjon. Vis at dersom det finnes en $M \in \mathbb{R}^+$ slik at $|f^{(n)}(x)| < M$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og alle n , så konvergerer $T_n(x)$ til $f(x)$ for alle x , hvor $T_n(x)$ er som i forrige oppgave. Med andre ord, vis at $E_n(x) \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, for alle x .

Hint: Du kan bruke at $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.