

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 8

Høst 2023

Innleveringsfrist: Mandag 23. Oktober

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

1 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x.$$

Bestem det største intervallet $I = [a, b]$ slik at $1 \in I$ og f er injektiv på I .

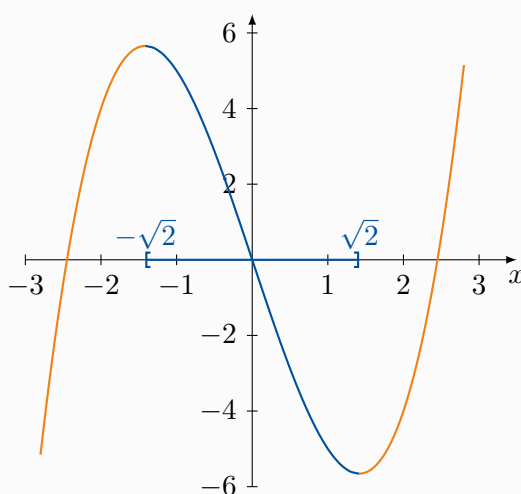
Løsning: Oppgave 1

Det er ikke altfor mye vi kan gjøre med funksjonen, men vi kan bemerke oss at enhver strengt monoton funksjon er injektiv. Derfor velger vi å derivere og sjekke hvor funksjonen er strengt monoton.

$$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$$

Vi kan se ved fortegnssdrøfting av f' at f er strengt avtagende på intervallet $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ og strengt voksende på intervallene $(-\infty, -\sqrt{2}]$ og $[\sqrt{2}, \infty)$. Funksjonen er dermed injektiv hvis man restrikerer til ett av disse intervallene.

Det er kun ett av disse intervallene som inneholder 1, så vi kan tro $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ er svaret vi er ute etter, og det er korrekt. Hvis man skulle vært tverr kunne man kverulert og spurt om man kunne utvidet dette intervallet på én eller begge sider; svaret er nei, dere kan selv tenke over hvordan dere kan rettferdiggjøre det svaret.



- 2 Funksjonen f er definert for $x \geq -3$ som

$$f(x) = x^4 - b \cdot x^3 + 2.$$

For hvilke verdier av b er f injektiv?

Løsning: Oppgave 2

Det er ikke altfor mye vi kan gjøre med funksjonen, men vi kan bemerke oss at enhver strengt monoton funksjon er injektiv. Derfor velger vi å derivere og sjekke for hvilke b vi får at f er strengt monoton.

$$f'(x) = 4x^3 - 3bx^2 = 4x^2(x - \frac{3}{4}b)$$

Fortegnet til $f'(x)$ er gitt ved fortegnene til x^2 og $(x - \frac{3}{4}b)$. x^2 er positiv for alle $x \neq 0$, mens $(x - \frac{3}{4}b)$ er negativ for $x < \frac{3}{4}b$ og positiv for alle $x > \frac{3}{4}b$.

Først kan vi observere at hvis $\frac{3}{4}b > -3$ så vil funksjonen f være strengt avtagende på intervallet $[-3, \frac{3}{4}b]$ og strengt voksende på intervallet $[\frac{3}{4}b, \infty)$, og siden vi kan se at f er kontinuerlig vil den dermed ikke være injektiv.

Nå kan vi se på hva som skjer når $\frac{3}{4}b \leq -3$. Da vil f være strengt voksende på hele definisjonsmengden, $[-3, \infty)$, og dermed også injektiv.

Vårt svar blir dermed at for $\frac{3}{4}b \leq -3$ eller tilsvarende $b \leq -4$, vil funksjonen være injektiv.

- 3 Vis at funksjonene f under er injektive, og finn inversfunksjonen f^{-1} . Spesifiser definisjons- og verdimengden til f^{-1} .

a) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ for $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Løsning: Oppgave 3

a) Funksjonen vi lurte på er gitt ved

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Vi benytter oss av samme krav som i a). Så la oss anta at vi har $x_1, x_2 \in D_f$ slik at

$f(x_1) = f(x_2)$. Det betyr spesielt at

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{1+x_1} &= \frac{x_2}{1+x_2} \\ \Updownarrow (x_1, x_2 \neq 0) \\ (1+x_2)x_1 &= (1+x_1)x_2 \\ \Updownarrow \\ x_1 + x_1x_2 &= x_2 + x_1x_2 \\ \Updownarrow \\ x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Altså er f injektiv. Her er det ikke like klart hva verdimengden til f er med en gang, og vi vil spesielt kunne finne verdimengden ved å først finne uttrykket for f^{-1} . Vi tar dermed uttrykket for inversfunksjonen først, i motsetning til i **a**).

$$\begin{aligned}y &= f(x) \\ y &= \frac{x}{1+x} \\ (1+x)y &= x \\ y + yx &= x \\ x - yx &= y \\ x(1-y) &= y \\ x &= \frac{y}{1-y}\end{aligned}$$

Dermed får vi $f^{-1} = \frac{y}{1-y}$, denne er definert for alle $y \neq 1$. Altså har vi

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

og

$$V_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty).$$

4 Finn lineariseringen av

$$f(x) = \sqrt{3+x^2} \quad \text{i} \quad x = 1.$$

Hint: Dette er Taylorpolynomet av grad 1

Løsning: Oppgave 4

$$f(1) = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(3+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(3+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Thus, the linearization of f about $x = 1$ is

$$L(x) = 2 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

- 5 Finn et uttrykk for det n 'te Taylorpolynomet, $T_n(x)$, til funksjonen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ rundt punktet $a = 0$. Hva skjer med dette polynomet når $x \geq 1$ og $n \rightarrow \infty$? Hvorfor motsier ikke dette Taylors teorem?

Løsning: Oppgave 5

Vi begynner med å regne ut den n 'te deriverte til $f(x)$. Vi finner den første deriverte, f.eks. ved hjelp av kjerneregelen,

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{(-1)^2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Den andre deriverte blir da

$$f''(x) = (-1) \cdot \frac{-2}{(1-x)^2}.$$

Ved gjentatt bruk av kjerneregelen får vi

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \frac{n!}{(1-x)^n}.$$

Dette gir oss

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)x^j}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x^j = \sum_{j=0}^n x^j = 1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

Dette er en geometrisk rekke, som vi vet kun konvergerer dersom $|x| < 1$. Dersom $x \geq 1$ ser vi raskt at $T_n(x) \geq n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Altså vil ikke $T_n(x)$ være en god tilnærming for $f(x)$ når $x \geq 1$. Intuitivt sier Taylors teorem at " $T_n(x)$ er en god tilnærming til $f(x)$ ", men betingelsene i teoremet krever at funksjonen eksisterer og er kontinuerlig i intervallet $[a, x]$. Funksjonen vår er ikke definert i $x = 1$. Altså kan vi ikke anvende Taylors teorem på i intervallet $[1, \infty)$.

- 6 La $T_n(x)$ være det n 'te grads Taylorpolynomet til $f(x)$ rundt punktet $a = 0$. La $E_n(x)$ være den absolutte feilen til T_n i x . Altså $E_n(x) := |f_n(x) - T_n(x)|$. Finn en k slik at $E_k(1) \leq 10^{-1}$ og regn ut $T_k(1)$ dersom

- a) $f(x) = 2x^2 + 2$.
- b) $f(x) = \sin(x)$.
- c) $f(x) = e^{2x}$.

Løsning: Oppgave 6

Vi vet fra Taylors teorem at dersom en funksjon er $n + 1$ ganger deriverbar på hele $\mathbb{R}$ så finnes det en c mellom x og 0 slik at

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)}.$$

Altså kan vi skrive $E_n(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)} \right|$ Dette impliserer

Lemma. La $f(x)$ være $n+1$ ganger deriverbar på $\mathbb{R}$. Dersom $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ når t ligger i intervallet mellom x og 0 , kan vi begrense feilen til $T_n(x)$ som følger:

$$E_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!} |x^{(n+1)}|.$$

Vi kommer til å bruke dette lemmaet i løsningen av **b)** og **c)**.

a) For $f(x)$ et polynom av grad n , er $T_n(x)$ en perfekt tilnærming. Altså er $T_2(x) = 2x^2 + 2$. Så $k = 2$ gir oss $E_k(1) = 0 \leq 10^{-1}$. med $T_2(1) = 4$. Vi ser også at $k = 0, 1$ ikke er tilstrekkelig etter som

$$E_0(1) = |f(1) - 2| = |4 - 2| > 10^{-1}, \quad E_1(1) = |f(1) - (4 \cdot 0 + 2)| > 10^{-1}.$$

b) Vi vet at alle de deriverte av $f(x) = \sin(x)$ er på formen $\pm \sin(x)$ eller $\pm \cos(x)$. Altså er $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$, for alle x og n . Vi bruker lemmaet vårt og får

$$E_n(1) \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Dersom $k = 4$ får vi $E_k(1) \leq (4!)^{-1} = 24^{-1} \leq 10^{-1}$. Vi får da

$$T_k(1) = T_4(1) = 0 + \frac{1 \cdot 1}{1!} - \frac{0 \cdot 1^2}{2!} + \frac{1 \cdot 1^3}{3!} - \frac{0 \cdot 1^4}{4!} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Merk at lemmaet i seg selv ikke nødvendigvis gir oss en måte å finne den minste k 'en. Her kunne vi f.eks. også valgt $k = 3$.

c) For $f(x) = e^{2x}$ får vi ved gjentatt bruk av kjerneregelen $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$. Siden e^{2x} er strengt voksende får vi

$$|2^n e^{2x}| \leq |2^n e^2|,$$

når $x \in [0, 1]$. Altså sier lemmaet vårt

$$E_n \leq \frac{2^n e^2}{n!}.$$

Vi ser, f.eks. ved hjelp av en kalkulator, at $\frac{2^8 e^2}{8!} \leq 10^{-1}$. Vi kan altså velge $k = 8$. Vi får da

$$T_8(1) = \sum_{n=0}^8 \frac{2^n e^0 \cdot 1^n}{n!} = \sum_{n=0}^8 \frac{2^n}{n!}.$$

Vi bruker igjen en kalkulator og får $T_8(1) = \frac{2327}{315} \approx 7.387$.

7 La $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en uendelig ganger dervierbar funksjon. Vis at dersom det finnes en $M \in \mathbb{R}^+$ slik at $|f^{(n)}(x)| < M$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og alle n , så konvergerer

$T_n(x)$ til $f(x)$ for alle x , hvor $T_n(x)$ er som i forrige oppgave. Med andre ord, vis at $E_n(x) \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, for alle x .

Hint: Du kan bruke at $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsning: Oppgave 7

Fikser en $x \in \mathbb{R}$. Vi kan bruke lemmaet fra forrige løsning til for å få

$$E_n(x) \leq \left| \frac{Mx^{(n+1)}}{(n+1)!} \right| = M \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Ved hjelp av hintet ser vi at $E_n(x) \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$.