

MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Øving 9
Høst 2024**Innleveringsfrist:** Mandag 28. Oktober

Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

- 1 Fyll inn boksene så likhetene stemmer

a) $\sum_{k=0}^8 (2k + 3) = \sum_{n=1}^9 \boxed{}$

b) $\sum_{n=0}^3 x^{3-n} = \sum_{m=\boxed{}}^{\boxed{}} x^m$

- 2 Deriver funksjonene under og forenkl uttrykkene hvis mulig. Gi også definisjonsmengdene til de deriverte

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{(e^x)}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2^{(x^2 - 3x + 8)}$

Hint: Kjernerregel

- 3 De hyperbolske trigonometriske funksjonene er definert som

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

I denne oppgaven skal vi utlede egenskaper til disse funksjonene.

- a) Regn ut den første og andre deriverte til $y(x) = \sinh(x)$. Hva kan du si om

$$y''(x) - y(x)?$$

- b) Vis at

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

- c) Finn ett uttrykk for $\sinh^{-1}(x)$.

- 4 Avgjør om de følgende utsagnene er **SANNE** eller **USANNE**. Hvis det er sant; bevis utsagnet. Hvis det er usant; gi ett moteksempel.

- a) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.
- b) Hvis $a_n \geq c > 0$ for alle n så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ til uendeligheten.

5 Finn summen av rekkene under, eller vis at rekkene divergerer.

- a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$. *Hint: Geometrisk rekke.*
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$
Hint: Bruk at $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ og kanseller ut ledd.
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$
Hint: Sammenlign med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

6 La $a \in (0, \infty)$.

- a) Bruk taylorrekken til $f(x) = e^x$ til å vise at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^x = 0.$$

- b) Vis ved hjelp av a) og variablebyttet $x = \ln(t)$ til å vise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t^a} = 0, \quad \text{og} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \ln t = 0.$$

Husk å argumentere for hvorfor du kan bruke dette variablebyttet.

7, Frivillig utfordring I denne oppgaven skal vi vise at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer ved hjelp av Cauchy-følger.

- a) Forklar hvorfor

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{n=M}^N \frac{1}{n^2} = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergerer.}$$

- b) Bevis at

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

- c) Sammenlign

$$\sum_{n=M}^N \frac{1}{n^2}$$

med de delvise summene i oppgave 5 b) og vis at verdien går mot 0 når $M, N \rightarrow \infty$.