MA1101 Grunnkurs i analyse 1

Løsningsforslag Øving 9
Høst 2024

Innleveringsfrist: Mandag 28. Oktober
Lever øvingen i øvsys. Du velger selv om du leverer på norsk eller engelsk. Ved ønske om grundig retting, spesifiser oppgaver du ønsker det på i øvsys. Det viktigste er *hvordan* du løser oppgaven, ikke selve løsningen.

$\boxed{1}$ Fyll inn boksene så likhetene stemmer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9} \square$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} x^{3-n} = \sum_{m=\square}^{\square} x^m$

Løsning: Oppgave 1

a) Her jobber vi kun med et variableskifte. Vi ser at $n = k+1$ eller tilsvarende $k = n-1$.

$$\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9}(2(n-1)+3) = \sum_{n=1}^{9}(2n+1)$$

b) Vi observerer at $x^{3-n} = x^m$ så $m = 3-n$. Når

$$n = 0 \quad \text{er} \quad m = 3-0 = 3,$$

og når

$$n = 3 \quad \text{er} \quad m = 3-3 = 0.$$

Indeksene i summen skal øke, så vi får dermed at nedre summegrense er $m = 0$ og øvre summegrense er $m = 3$. Altså får vi

$$\sum_{n=0}^{3} x^{3-n} = \sum_{m=0}^{3} x^m$$

$\boxed{2}$ Deriver funksjonene under og forenkl uttrykkene hvis mulig. Gi også definisjonsmengdene til de deriverte

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{(e^x)}$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2^{(x^2-3x+8)}$

Hint: Kjerneregel

Løsning: Oppgave 2

a) $f(x) = e^{(e^x)}$, $f'(x) = e^{(e^x)}e^x = e^{x+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$, $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 2^{(x^2-3x+8)}$, $f'(x) = (2x-3)(\ln 2)2^{(x^2-3x+8)}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ De hyperbolske trigonometriske funksjonene er definert som

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

I denne oppgaven skal vi utlede egenskaper til disse funksjonene.

a) Regn ut den første og andre deriverte til $y(x) = \sinh(x)$. Hva kan du si om

$$y''(x) - y(x)?$$

b) Vis at

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

c) Finn ett uttrykk for $\sinh^{-1}(x)$.

Løsning: Oppgave 3

a)

We compute

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{-e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$
$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{-e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

Thus

$$y''(x) - y(x) = \sinh(x) - \sinh(x) = 0.$$

b) We compute

$$\begin{aligned}\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

c) We solve $y = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ for y as

$$2y = e^x - e^{-x} \implies 2ye^x = (e^x)^2 - 1.$$

Let $t = e^x$ so that the above can be written as

$$2yt = t^2 - 1 \implies t^2 - 2yt - 1 = 0 \implies t = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Note that the solution corresponding to the negative root is negative which $t = e^x$ never is since we assume $x \in \mathbb{R}$. We therefore choose the positive root for the inverse and take the logarithm to get x alone as

$$x = \sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

$\boxed{4}$ Avgjør om de følgende utsagnene er **SANNE** eller **USANNE**. Hvis det er sant; bevis utsagnet. Hvis det er usant; gi ett moteksempel.

a) Hvis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer så divergerer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

b) Hvis $a_n \geq c > 0$ for alle n så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ til uendeligheten.

Løsning: Oppgave 4

a)

TRUE. For a series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ to converge we need $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. So if $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges we get that $\frac{1}{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. So $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ can not converge.

b)

TRUE. We have

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq c + c + c + \cdots + c = nc,$$

and $nc \to \infty$ as $n \to \infty$.

$\boxed{5}$ Finn summen av rekkene under, eller vis at rekkene divergerer.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$. *Hint: Geometrisk rekke.*

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \cdots$

Hint: Bruk at $\displaystyle\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ *og kanseller ut ledd.*

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$
Hint: Sammenlign med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Løsning: Oppgave 5

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}} = 8e^3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^k = \frac{8e^3}{1-\frac{2}{e}} = \frac{8e^4}{e-2}.$$

b)

Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \cdots .$$

Since

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big),$$

the partial sum is

$$\begin{aligned} s_n =& \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Big) + \cdots + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big) \\ =& \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big). \end{aligned}$$

Hence,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

c)

Since $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$, therefore the partial sums of the given series exceed half those of the divergent harmonic series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Hence the given series diverges to infinity.

$\boxed{6}$ La $a \in (0, \infty)$.

a) Bruk taylorrekken til $f(x) = e^x$ til å vise at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \text{og} \lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0.$$

b) Vis ved hjelp av **a)** og variablebyttet $x = \ln(t)$ til å vise

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^a} = 0, \quad \text{og} \quad \lim_{t\to 0^+} t^a \ln t = 0.$$

Husk å argumentere for hvorfor du kan bruke dette variablebyttet.

Løsning: Oppgave 6

a) Vi starter med den første grensen. For en fiksert a kan vi alltid finne et heltall $N > a$. Vi har da

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^N}{N!}+\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots > \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \implies \frac{x^a}{e^x} < \frac{x^a}{\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}} < \frac{(N+1)!}{x}.$$

Siden $\frac{(N+1)!}{x}$ helt klart grenser mot 0 når x går mot uendelig, og $\frac{x^a}{e^x} > 0$ får vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

Den andre grensen vi skulle vise følger direkte fra den første ved å observere at

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = \lim_{x\to\infty} |-x|^a e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

b) Vi observerer at $\lim_{t\to\infty} \ln(t) = \infty$ og $\lim_{t\to 0^+} \ln(t) = -\infty$. Altså får vi for $b \in (0,\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^x} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(t))^b}{e^{\ln t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln(t))^b}{t} = 0.$$

Videre kan vi observere at $\lim_{t\to\infty} f(t)^{1/b} = 0 \iff \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Vi har derfor vist den første grensen ved å velge $b = \frac{1}{a}$.

Vi bruker et lignende argument for den andre grensen. Vi får

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b e^x = \lim_{t\to 0^+} |\ln t|^b e^{\ln t} = \lim_{t\to 0^+} |\ln t|^b t = 0.$$

Vi har ved skvise teoremet $\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Vi bruker dette sammen med observasjonen vi brukte på forrige grense og får

$$\lim_{t\to 0^+} |\ln t|^b t = 0 \iff \lim_{t\to 0^+} (|\ln t|^b t)^{\frac{1}{b}} = \lim_{t\to 0^+} |\ln t| t^{\frac{1}{b}} = 0 \iff \lim_{t\to 0^+} \ln(t) t^{\frac{1}{b}} = 0.$$

Igjen får vi grensen vi er ute etter ved å velge $b = \frac{1}{a}$.

7, Frivillig utfordring I denne oppgaven skal vi vise at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer ved hjelp av Cauchy-følger.

a) Forklar hvorfor

$$\lim_{N,M\to\infty}\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{n^2}=0 \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ konvergerer.}$$

b) Bevis at

$$\frac{1}{n^2}\leq\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

c) Sammenlign

$$\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{n^2}$$

med de delvise summene i oppgave 5 b) og vis at verdien går mot 0 når $M,N\to\infty$.

Løsning: Oppgave 7

a) Let s_N be the N´th partial sum of $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. The sum is finite if the partial sums converge and if the sequence $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ is a Cauchy seqeuence, it in particular converges.

b) The right hand side can be rewritten as

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{4}{4n^2-1}\geq\frac{4}{4n^2}=\frac{1}{n^2}.$$

c) From **b)** we have that

$$\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{n^2}\leq 4\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=4(S_N-S_M)$$

where S_N is the N:th partial sum of $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ which we showed was equal to $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$. Hence we have that

$$\lim_{M,N\to\infty}\sum_{n=M}^{N}\frac{1}{n^2}\leq\lim_{M,N\to\infty}4\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2M+1}\right)\right]=0.$$