MA1102, ØVING 13, LØSNING:
(9/5 - 11/5 -05)

9.3 #1, s.545:

Vi skal avgjöre om rekken

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

konvergerer eller divergerer. Vi observerer at $1/(n^2+1) < 1/n^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Videre vet vi at $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konvergerer (Eks. 1, s.536) Ut fra sammenligningstesten (Teorem 9, s.539) följer da at den aktuelle rekke (*) konvergerer.

#7, s.545:

Samme problem for rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$$

Hvorfor starte med n=2 her?

Det er velkjent at $(\ln n)^3 < n$ fra et visst n av siden:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = 0 \quad \text{(Teorem 5(b), s. 197)}$$

Altså har vi $(\ln n)^{-3} > n^{-1}$, og siden rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer vil den gitte rekke også divergere.

#13, s.545:

Vi skal avgjöre divergens/konvergens for rekken:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln(\ln n)}}$$

Hvorfor starte med n=3 her?

Vi vil först bevise at integralet:

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}} \quad \text{divergerer.}$$

(Øving 13, lösn. forts.)

Vi regner ut det ubestemte integralet först. Her lönner det seg å substituere:

$$u = \ln(\ln x), \quad du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

Altså:

$$\int \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}} = \int \frac{du}{u^{1/2}} = 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$= 2\,[\ln(\ln x)]^{\frac{1}{2}} + C$. Altså har vi videre:

$$\int_3^T \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}} = 2[\ln(\ln T)]^{\frac{1}{2}} - 2[\ln(\ln 3)]^{\frac{1}{2}}$$

$\to \infty$ når $T \to \infty$. Altså divergerer integralet – og derfor divergerer rekken ovenfor ut fra integral-testen (Teorem 8, s. 535)

#21, s. 545:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$$ Konvergens/divergens?

Vi har: $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\ln(n+1)} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n}} \ln n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[3^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right] = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]$$

$\underline{= \frac{1}{3}}$ siden $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1$ og

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1$. Altså har vi <u>konvergens</u> i fölge forholdskriteriet. (Teorem 11, s. 542)

(At $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1$ fölger f.eks. ved å bruke L'Hôpital på

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x} = \underline{1}\,.)$$

(Øving 13, løsn. forts.)

#25, s. 545:

Vi skal avgjøre konvergens/divergens for rekken: $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$

Vi benytter igjen forholdskriteriet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-(n+1)^3}\cdot\frac{3^n-n^3}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\,\frac{3^n\left(1-\frac{n^3}{3^n}\right)}{3^{n+1}\left(1-\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\frac{n^3}{3^n}}{1-\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}\right)$$

$= \frac{2}{3}$ siden $\lim_{x\to\infty} x^3/3^x = 0$ (Følger lett fra Teorem 5 (a), s. 197). Ut fra forholds-kriteriet følger det at rekken konvergerer.

9.4 #1, s. 553:

Vi skal avgjøre om rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerer eller konvergerer – og om i det siste tilfellet konvergensen er absolutt eller betinget. Vi ser straks at rekken oppfyller betingelsene i Leibniz-kriteriet (Teorem 14, s. 58):

(i) Rekken er alternerende.

(ii) $1/\sqrt{n+1} < 1/\sqrt{n}$ for alle n

(iii) $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} = 0$

Altså er rekken konvergent. Siden $n^{-1/2} \geq n^{-1}$ for alle n og den harmoniske rekke divergerer, må $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ også divergere i følge sammenligningstesten. Altså konvergerer vår rekke betinget.

(Øving 13, lösn. forts.)

#5, s. 553:

Vi skal avgjöre konvergens/divergens for den alternerende rekken:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

Her ser vi straks at $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1-1/n^2}{1+1/n^2} = 1 \neq 0$. Altså har vi divergens i fölge "divergens-testen" (Teorem 4, s. 532).

#11, s. 553:

Vi skal avgjöre konvergens/divergens for den alternerende rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{100^n}$$

For hvert $n > 100$ har vi:

$$|a_n| = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots 100}{100^{100}}\cdot\frac{101}{100}\cdot\frac{102}{100}\cdots\frac{n}{100}$$

$$> \frac{1}{100^{100}}\cdot\frac{101}{100}\cdot\frac{102}{100}\cdots\frac{n}{100} > \frac{1}{100^{100}}$$

siden de $n-100$ siste faktorer alle er >1. Altså kan vi ikke ha at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Derfor divergerer rekken.

#17, s. 553:

Vi skal avgjöre for hvilke x rekken

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$$

konvergerer absolutt, konvergerer betinget, divergerer.

(Øving 13, løsn. forts.)

Vi har:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{x}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)^{1/2} = |x|.$$

Altså har vi <u>absolutt konvergens for $x\in\,]-1,1[$</u>. For <u>$x=-1$</u> blir rekken:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

som oppfyller betingelsene i Leibniz-kriteriet og følgelig er <u>konvergent</u>.
For $x=1$ blir rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Siden $(n+1)^{-1/2} > n^{-1}$ for $n=2,3,\ldots$, og den harmoniske rekken divergerer, må vår rekke også <u>divergere for $x=1$.</u>
<u>Altså betinget konvergens for $x=-1$.</u>

<u>9.5 # 1, s. 564:</u>

Vi skal bestemme senteret, konvergens-radius og konvergens-intervall for potens-rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$$

Sentrum: $c=0$

Vi har:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{x^{2n}}\right|$$

$$= |x|^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2} = |x|^2$$

Vi har derfor <u>absolutt konvergens i intervallet $]-1,1[$.</u> <u>Konvergensradius $R=1$.</u>

(Øving 13, lösn. forts.)

For $|x| = 1$ får vi rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ som vi har bevist er divergent i ovenstående oppgave. Konvergensintervall: $]-1,1[$.

#5, s. 564:

Samme spörsmål for potensrekken:
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (2x-3)^n$$

Vi har her:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{n^3}|2x-3|\right) = |2x-3|$$

Vi har derfor absolutt konvergens når $|2x-3| < 1$ eller ekvivalent: $|x - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$.

Konvergenssentret blir da $c = \frac{3}{2}$, konvergensradius $R = \frac{1}{2}$ og konvergensintervall $]1,2[$.

(For $x = 1$ og $x = 2$ vil $|a_n| \to \infty$.)

#7, s. 564:

Samme spörsmål for potensrekken: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$.

Vi har her:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(|x| \cdot \frac{1+5^{n+1}}{1+5^n} \frac{n!}{(n+1)!}\right)$$
$$= |x| \cdot 5 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 + 1/5^{n+1}}{1 + 1/5^n} \cdot \frac{1}{n+1}\right) = 0 \qquad \begin{array}{c} c = 0 \\ R = \infty \end{array}$$

#23, s 565:

Vi skal bestemme konvergens-intervall og sum for potensrekken: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/(n+3)$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$. Det följer lett at konvergensintervallet blir $[-1,1[$.

Videre har vi for $|x| < 1$: $s(x) =$

$\boxed{\text{*Eks 4c s.561}}$

$$\frac{1}{x^3}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots\right] \overset{*}{=} \frac{1}{x^3}\left[-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right]$$
$$= -\frac{1}{x^3}\ln(1-x) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} \quad \text{for } x \in [-1,1[\setminus\{0\}.$$

$s(0) = \frac{1}{3}$ Abels teorem (s.560) gir: $s(-1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$