MA1102, ØVING 14, LØSNING:

(Uke 19 - 2005 - ingen gruppetimer!)

9.5 #3, s. 564:

Vi skal bestemme konvergens-senteret c, konvergens-radius R og konvergensintervall for potensrekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$$

Her betegner $a_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

Vi ser på $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| =$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{x+2}{2}\right| = \left|\frac{x+2}{2}\right|$. Ut fra forholds-kriteriet har vi derfor:

$\left|\frac{x+2}{2}\right| < 1$ gir abs. konv. $\Leftrightarrow$ $|x+2|<2$ konv.

$\left|\frac{x+2}{2}\right| > 1$ gir divergens. $\Leftrightarrow$ $|x+2|>2$ diverg.

$\frac{x+2}{2} = 1$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ gir den harmoniske rekke og dermed divergens

$\frac{x+2}{2} = -1$ $\Leftrightarrow$ $x=-4$ gir $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ som konvergerer i følge Leibniz-kriteriet (Teorem 14)

Altså: $\underline{c=-2}$, $\underline{R=2}$, $\underline{\text{konv. intervall: } [-4,0[}$

#7, s. 564:

Samme spørsmål for potensrekken:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!}x^n$$

Vi ser igjen på: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| =$

$$|x|\lim_{n\to\infty}\frac{(1+5^{n+1})\;n!}{(n+1)!\,(1+5^n)} = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot 5\,\frac{1+1/5^{n+1}}{1+1/5^n}\right)$$

$= |x|\cdot 0\cdot 1 = 0$. Altså her er:

$\underline{c=0}$, $\underline{R=\infty}$, $\underline{\text{konvergensintervall er hele } \mathbb{R}}$.

(Øving 14, lösn., forts.)

#13, s.564:

Vi skal utvikle $f(x) = (2-x)^{-2}$ i potensrekke omkring $c = 0$ og deretter bestemme området der utviklingen er gyldig (d.v.s. gir $f(x)$ som rekkens sum)

Vi starter med:

$$(2-x)^{-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \cdots\right)$$

når $|x| < 2$ – geometrisk rekke. Videre har vi ved derivasjon (Teorem 19, s.559):

$$\frac{d}{dx}(2-x)^{-1} = \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{2^2} + \frac{3x^2}{2^3} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{2^n} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1}$$ som er gyldig for $|x| < 2$.

For $x = 2$ er funksjonen ikke definert for $x = -2$ blir det allmenne ledd $(-1)^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{4}$ som ikke går mot 0 når $n \to \infty$. Altså divergens.

#25, s.565:

Vi skal bestemme konvergens-intervall og finne summen av potensrekken:

$$2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \cdots$$

Vi observerer at $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)x^{2n}}{2n \cdot x^{2n-2}}\right| = |x|$, s.a. vi har konvergens for $|x| < 1$.

Vi starter så med:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \qquad |x|<1$$

Derivasjon gir:

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = 2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 + \cdots$$

som gir: ved divisjon med x på begge sider:

$$\frac{2}{(1-x^2)^2} = 2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \cdots$$

(Øving 14, lösn. forts.)

Ut fra det ovenstående gjelder formelen åpenbart i $]-1,1[$ i det innsetting av $x=0$ på begge sider gir riktig sum. For $|x|=1$ er summeformelen meningsløs og rekken divergent.

#27, s. 565:

Vi skal finne summen til rekken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

Igjen starter vi med summeformelen for den geometriske rekke:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad , |x|<1$$

Derivasjon gir:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots ; |x|<1$$

Multiplikasjon med x gir:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

$\boxed{\text{NB! } \left|\tfrac{1}{3}\right| < 1}$

Innsetting av $x = \frac{1}{3}$ gir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3}\,\frac{9}{4} = \underline{\frac{3}{4}}$$

#29, s. 565:

Vi skal bestemme summen av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}$

Vi starter med (Oppg. #27):

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots ; |x|<1$$

Derivasjon på begge sider gir:

$$(1-x)^{-2} + 2x(1-x)^{-3} = (1-x+2x)\cdot(1-x)^{-3} =$$

(Øving 14, løsn. forts.)

$(1+x)(1-x)^{-3} = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \dots + n^2 x^{n-1} + \dots$

for $|x| < 1$.

Vi har m.a.o.:

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

Siden $\left|\frac{1}{\pi}\right| < 1$, kan vi sette inn $x = \frac{1}{\pi}$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$$

$$\frac{1+\frac{1}{\pi}}{\left(1-\frac{1}{\pi}\right)^3} = \frac{\pi^2(\pi+1)}{(\pi-1)^3} = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}}$$

#31, s.565:

Vi skal bestemme summen av $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$

Vi kan igjen starten med:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \qquad |x| < 1$$

Integrasjon på begge sider fra 0 til x der $|x| < 1$ (Teorem 19, s.559), gir:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

For $x = \frac{1}{2}$ har vi:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2} = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n n}}$$

9.6 #3, s.572:

Vi skal finne Maclaurin-rekken for funksjonen: $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ – og deretter avgjøre gyldighets-området.

Vi får:

$f(0) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$f''(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $f''(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $f'''(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(Øving 14, løsn. forts.)

$f'''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $f^{(4)}(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$, $f^{(4)}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vi har videre: $f^{(n+4)}(0) = f^{(n)}(0)$.

Dette gir:

$$f(x) \sim f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(4m)}(0)}{4m!}x^{4m} + \frac{f^{(4m+1)}(0)}{(4m+1)!}x^{4m+1} + \frac{f^{(4m+2)}(0)}{(4m+1)!}x^{4m+2} + \frac{f^{(4m+3)}(0)}{(4m+3)!}x^{4m+3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{x^{4m}}{(4m)!} + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} + \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!} - \frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}\right)$$

Konvergensintervallet er hele $\mathbb{R}$ siden

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0$$

#15, s. 573:

Vi skal bestemme Taylor-rekken til $f(x) = e^{-2x}$ omkring $x = -1$. Vi har her: $f'(x) = -2e^{-2x}$, $f''(x) = (-2)^2e^{-2x}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$. Dette gir:

$$f(x) \sim e^2 - \frac{2}{1!}e^2(x+1) + \frac{2^2}{2!}e^2(x+1)^2 + \cdots + (-1)^n\frac{2^n}{n!}e^2(x+1)^n + \cdots$$

$$= e^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}(x+1)^n$$ (Konvergens for alle x)

#23, s. 573:

$f(x) = 1/x^2$ skal utvikles i potenser av $x+2$.

$f(x) = x^{-2}$, $f'(x) = -2x^{-3}$, $f''(x) = 2\cdot 3x^{-4}, \ldots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-n-2}, \ldots$

$f(-2) = (-2)^{-2} = \frac{1}{2^2}$, $f'(-2) = -2/(-2)^3 = \frac{1}{2^2}$

$f''(-2) = \frac{3!}{(-2)^{-4}}$, ... $f^{(n)}(-2) = (n+1)!\,\frac{1}{2^{n+2}}$, ...

$$f(x) \sim \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1!}\frac{2!}{2^3}(x+2) + \frac{1}{2!}\frac{3!}{2^4}(x+2)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}(x+2)^n + \cdots = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x+2)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = |x+2|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n+1}\right) = |x+2|\cdot\frac{1}{2} < 1$$

Konvergens for $x \in \,]-4, 0[$ Hva med endepunktene?