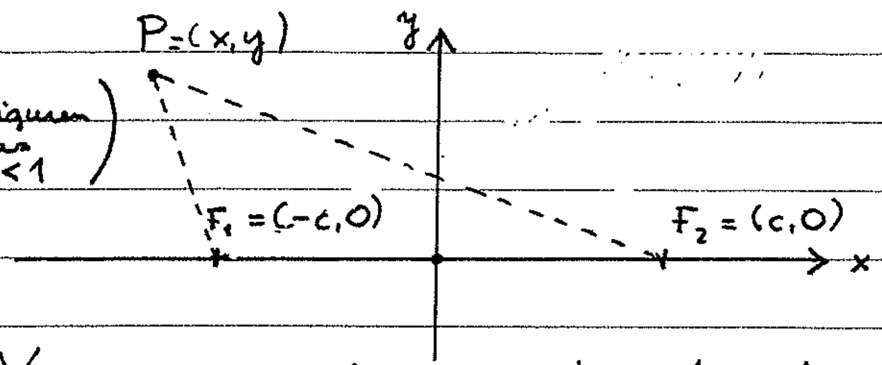
UKENS UTFORDRING № 1:

(På figuren antas $k<1$)



$k = 1$ gir y-aksen!

Vi velger koordinatsystemet som angitt på figuren. Anta $k \neq 1$, $k>0$. Vi söker ligningen for de punkter i planet $P=(x,y)$ som er s.a.

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = k \quad \text{eller} \quad \frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2} = k^2.$$

$$|PF_1|^2 = (x+c)^2 + y^2 = k^2((x-c)^2+y^2) = k^2|PF_2|^2$$

som gir:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = k^2x^2 - 2k^2cx + k^2c^2 + k^2y^2$$

$$(1-k^2)x^2 + 2c(1+k^2)x + (1-k^2)y^2 = c^2(k^2-1)$$

$$x^2 + 2c\frac{1+k^2}{1-k^2}x + y^2 = -c^2 \quad (k^2 \overset{\text{NB!}}{\neq} 1)$$

NB! Komplettering av kvadratet.

Dette er ekvivalent med:

$$x^2 + 2c\frac{1+k^2}{1-k^2}x + c^2\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2$$

$$= c^2\left(\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1\right)$$

eller:

$$\left(x + c\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2c^2}{(1-k^2)^2}$$

(Antar så $k<1$.)

Dette er ligningen for en sirkel med sentrum $\left(-c\frac{1+k^2}{1-k^2}, 0\right)$ og radius $R = \frac{2kc}{1-k^2}$. De sirklene som framkommer på denne måten kalles Apollonius' sirkler.

(Tilfellet $k>1$ behandles helt analogt.)