UKENS UTFORDRING №5, LØSNING:

(i) Formelen på s. 501 for overflate-areal når kurven roteres om x-aksen gir:

$$S = 2\pi \int_a^b g(x)\sqrt{1+g'(x)^2}\,dx$$

når $g(x)>0$ i $[a,b]$ og vi har $x = t = f(t)$, $y = g(t)$. Vi roterer halvsirkelen gitt ved $y = \sqrt{r^2-x^2}$; $-r \le x \le r$.

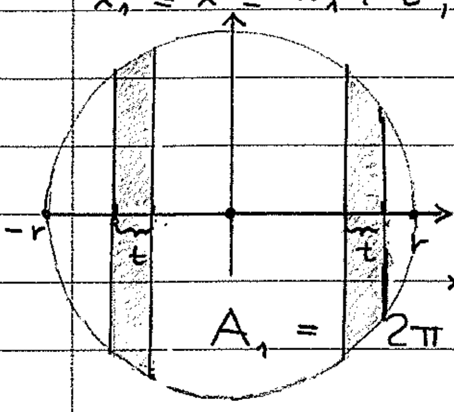
Dette gir:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx$$

$$= 2\pi r\cdot x\Big|_{-r}^{r} = \underline{4\pi r^2}$$

(ii) Vi ser på to skiver med samme tykkelse: $x_0 \le x \le x_0+t$ og $x_1 \le x \le x_1+t$, der x_0, x_1 og t er valgt slik at alle punktene ovenfor ligger i intervallet $[-r,r]$.



Vi har da:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 2\pi\int_{x_0}^{x_0+t} r\,dx = 2\pi r\cdot t \\ A_2 &= 2\pi\int_{x_1}^{x_1+t} r\,dx = 2\pi r\cdot t \end{aligned}\right\} \text{Se del (i)!}$$

Altså er $A_1 = A_2$