UKENS UTFORDRING № 6, LØSNING:

(a) Vi refererer til Teorem 1, s. 497. La oss anta at f er slik at forutsetningene i 1. del av teoremet er oppfylt. Vi har:

$$x = f(\theta)\cos\theta \quad , \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

Vi har da at stigningstallet til tangenten til kurven blir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f(\theta)/f'(\theta) + \tan\theta}{1 - \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}\tan\theta}$$

Vi vet også at dette stigningstallet er lik $\tan\theta_t$ (se figuren!)

<u>NB</u>! Det oppgitte uttrykket er <u>beklageligvis</u> lik stigningstallet $-\frac{dx}{dy}$ - se 2. del av Teorem 1!

(b) Fra figuren ser vi også at

$$\theta_t = \theta - \psi$$

eller $\psi = \theta - \theta_t$. Dette gir:

$$\tan\psi = \frac{\tan\theta - \tan\theta_t}{1 + \tan\theta\cdot\tan\theta_t} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Velkjent formel} \\ \text{for } \tan(\alpha-\beta)\end{array}\right)$$

$$\overset{\text{fra (a)}}{=} \frac{\tan\theta - \left(f(\theta)/f'(\theta) + \tan\theta\right)/\left(1 - \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}\tan\theta\right)}{1 + \tan\theta\left(f(\theta)/f'(\theta) + \tan\theta\right)/\left(1 - \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}\tan\theta\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\tan\theta} - \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}\tan^2\theta - f(\theta)/f'(\theta) - \cancel{\tan\theta}}{1 - \cancel{\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}\tan\theta} + \cancel{\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}\tan\theta} + \tan^2\theta}$$

$$= -\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}\left(1 + \tan^2\theta\right) \Big/ \left(1 + \tan^2\theta\right) = -\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

(Beklager at minus-tegnet manglet i oppgaven! Boken (s. 512) ser på supplementvinkelen $\pi - \psi$.)