UKENS UTFORDRING № 7, LØSNING.

19, s. 229:

Vi skal vise at $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
er løsning av differensialligningen:

$$(+) \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

for hvert valg av konstantene A og B.

$$y' = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$
$$y'' = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

Dette gir:

$$\underline{y'' + \omega^2 y} \equiv -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$
$$+ \omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \equiv \underline{0}.$$

20, s. 229:

Vi skal så bevise at om $y = f(t)$ er en vilkårlig løsning av $(+)$, så er $\omega^2(f(t))^2 + (f'(t))^2 \equiv c$ (konstant)

Ekvivalent: bevise at $\frac{d}{dt}$ av venstre-siden ovenfor er $\equiv 0$. Vi har altså:

$$(++) \quad f''(t) + \omega^2 f(t) \equiv 0$$

ut fra vår antagelse. Derivasjon gir:

$$\frac{d}{dt}\left(\omega^2(f(t))^2 + (f'(t))^2\right) = \omega^2 2f(t)\cdot f'(t)$$
$$+ 2f'(t)\cdot f''(t) = 2f'(t)\cdot[\omega^2 f(t) + f''(t)]$$

$\equiv 0$ ut fra $(++)$. Altså er:

$$\underline{\omega^2(f(t))^2 + (f'(t))^2 \equiv c}$$

21, s. 229:

Vi skal bevise at om $y = g(t)$ er en løsning av $(+)$ som oppfyller randbetingelsene $g(0) = g'(0) = 0$, så må $g(t) \equiv 0$.

UKENS UTFORDRING Nº 7, LØSNING (forts.)

Ut fra oppg #20 ovenfor, må vi ha:

$$\omega^2(g(t))^2 + (g'(t))^2 \equiv C$$

Setter vi inn $t = 0$ på venstre-siden får vi:

$$\omega^2(g(0))^2 + (g'(0))^2 = 0$$

ut fra randverdibetingelsene. Altså har vi at $C = 0$. Dette gir så at:

$$(\text{+++}) \quad \omega^2(g(t))^2 + (g'(t))^2 \equiv 0,$$

som igjen medfører at $\underline{g(t) \equiv 0}$ og $g'(t) \equiv 0$ siden $\omega \neq 0$ og begge ledd i (+++) er positive.

<u>#22, s. 229:</u>

Anta så $y = f(t)$ er en vilkårlig løsning av (+). Vi innfører så:

$$g(t) = f(t) - f(0)\cos\omega t - \frac{f'(0)}{\omega}\sin\omega t$$

Siden (+) er en lineær differensial-ligning og såvel $y = f(t)$ (pr. antagelse) og $y = -f(0)\cos\omega t - \frac{f'(0)}{\omega}\sin\omega t$ (ut fra #19) er løsninger av (+), er også $y = g(t)$ en løsning av (+). Videre har vi: $\underline{g(0)} = f(0) - f(0) = \underline{0}$, mens

$$g'(t) = f'(t) + \omega f(0)\sin\omega t - f'(0)\cos\omega t$$

og dermed: $\underline{g'(0)} = f'(0) - f'(0) = \underline{0}$.

Ut fra #21 har vi da at:

$g(t) \equiv 0$ eller: $f(t) \equiv f(0)\cos\omega t + \frac{f'(0)}{\omega}\sin\omega t$.

Altså har vi bevist at <u>enhver løsning av (+) har formen:</u>

$$\underline{f(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}.$$

#23, s. 229

Vi antar at differensialligningen:

$$(\nabla) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

er s.a. $b^2 - 4ac < 0$. (Dette vil si at röttene i den tilhörende algebraisk ligning $ar^2 + br + c = 0$ er komplekst konjugerte - d.v.s. $r_1 = k + i\omega$, $r_2 = k - i\omega$ der $i = \sqrt{-1}$) Vi kan unngå å trekke inn komplekse tall på fölgende måte.

Vi innförer $y = e^{kt} \cdot u$, der vi antar at y er en lösning av (∇). Vi velger her $k = -b/2a$. Vi har:

$$y' = -\frac{b}{2a} e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot u + e^{-\frac{b}{2a}t} u' = e^{-\frac{b}{2a}t}\left[-\frac{b}{2a}u + u'\right]$$

$$y'' = -\frac{b}{2a} e^{-\frac{b}{2a}t}\left[-\frac{b}{2a}u + u'\right] + e^{-\frac{b}{2a}t}\left[-\frac{b}{2a}u' + u''\right]$$

$$= e^{-\frac{b}{2a}t}\left[\frac{b^2}{4a^2}u - \frac{b}{a}u' + u''\right]$$

Innsatt i (∇) gir dette:

$$e^{-\frac{b}{2a}t}\left[\frac{b^2}{4a}u - \cancel{bu'} + au''\right] + e^{-\frac{b}{2a}t}\left[-\frac{b^2}{2a}u + \cancel{bu'}\right]$$

$$+ c\,e^{-\frac{b}{2a}t}u = e^{-\frac{b}{2a}t}\left[\left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)u + au''\right]$$

$$= e^{-\frac{b}{2a}t}\left[\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)u + au''\right] = 0$$

Altså må u være en lösning av differensialligningen: $u'' + \omega^2 u = 0$ der $\omega^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$. Ut fra #22 må dermed en vilkårlig lösning av (∇) være av formen:

$$y = e^{kt}\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right],$$

der $k = -\frac{b}{2a}$ og $\omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$, nöyaktig som angitt for Case III på s. 220.