

①

MA1102, EKSAMEN 1/6-2006LØSNINGER:OPPGAVE 1:

$$r = \frac{3}{\sin \theta} \iff y = r \sin \theta = 3$$

Dette blir en rett linje parallell med x-aksen. ($\theta \neq 0, \pi$ antas implisitt!)

OPPGAVE 2:

Newtons metode gir:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2 \\ f'(x) = 2x \end{array}$$

(Vi det ene nullpunktet for $f(x) = 0$)

$$x_0 = 3/2 \quad f(3/2) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$f'(3/2) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Dette gir:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{f(3/2)}{f'(3/2)} = \frac{3}{2} - \frac{1/4}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{17}{12} = 1.41666... = \underline{1.41\bar{6}}$$

OPPGAVE 3:

Vi skal finne buelengden til kurven:

$$x = t + \sin t, \quad y = \cos t; \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$x'(t) = 1 + \cos t, \quad y'(t) = -\sin t.$$

Buelengden blir:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos t)^2 + (-\sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos t} dt$$

Vi har formelen:

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

(2)

MA1102, 1/6-2006 (Løsn.)

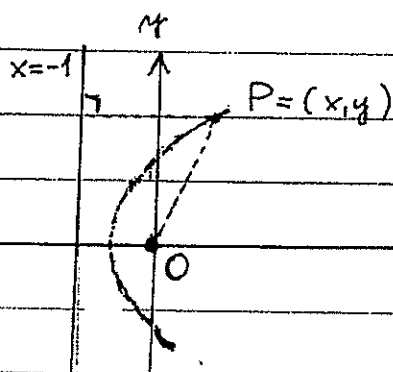
Dette gir: π

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^{\pi} |\cos \frac{t}{2}| dt$$

Siden $\cos \frac{t}{2} \geq 0$ for $t \in [0, \pi]$,
har vi dermed:

$$L = 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt = 2 \left[2 \sin \frac{t}{2} \right]_0^{\pi} = 4 \cdot 1 = 4$$

OPPGAVE 4:

Avstanden mellom $P = (x, y)$ og origo er $\sqrt{x^2 + y^2}$.Avstanden mellom $P = (x, y)$ og linjen $x = -1$ er $|x + 1|$.

Skal ha:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |x + 1|$$

eller ekvivalent:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$y^2 = 2x + 1$$

Dette gjenkjenner vi som en
parabel med toppunkt i $(-\frac{1}{2}, 0)$,
brennpunkt i origo og styrelinje $x = -1$.
(Symmetrien om x-aksen er opplagt.)

OPPGAVE 5:

(a) Vi innfører betegnelsen:

$$S_n = 1 + k + k^2 + \dots + k^n$$

Multipliseres begge sider med k ,
får vi:

$$k S_n = k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n+1}$$

Subtraksjon gir:

(3)

MA1102, 1/6-2006 (LØSN.)

$ks_m - s_m = k^{m+1} - 1$ (alle andre ledd
 kanselleres!) For $k \neq 1$ har vi:
 $(k-1)s_m = k^{m+1} - 1$ eller:

$$s_m = \frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}$$

(b) Formelen i (a) med $k = -t^2$ gir:

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-t^2)^{m-1} = \frac{(-t^2)^m - 1}{-t^2 - 1}$$

$$= \frac{1 - (-t^2)^m}{1 + t^2} \quad \text{for alle } t \text{ siden } -t^2 \text{ ikke kan bli lik } 1.$$

Dette gir ved overflytting:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-t^2)^{m-1} + \frac{(-t^2)^m}{1+t^2}$$

Integrer vi begge sider fra 0 til x
 får vi:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \int_0^x \frac{(-t^2)^m}{1+t^2} dt$$

(c) Siden formelen i (b) også holder for
 $x=1$, får vi:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{2m-1} + \int_0^1 \frac{(-t^2)^m}{1+t^2} dt$$

Siden $1 \leq 1+t^2 \leq 2$ når $0 \leq t \leq 1$,
 har vi:

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t^2)^m}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{2m} dt = \frac{1}{2m+1}$$

Altså har vi:

$$\left| \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \right) \right| < \frac{1}{2m+1}$$

(4)

MA1102, 1/6-2006 (LØSN.)

Altså har vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{4},$$

der S_n betegner partialsummer for rekken:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

Altså:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

som er Gregory/Leibniz formel.

(d) Vi har for $|t| < 1$:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \dots$$

Ud fra velkendt teorem om integration af potensrekker ledd for ledd, får vi for $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$\text{og} \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} x$$

Abels teorem: Dersom rekken konvergerer i højre endepunkt af konvergensintervallet, så er rekkenes sum i dette punkt $\lim_{x \rightarrow R^+} s(x)$, der $s(x)$ er summen af rekken i $] -R, R[$.

Altså har vi for vort tilfælde:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1^-} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4}$$

(At denne rekke konvergerer følger af

⑤

MA1102, 1/6-2006 (LØSN.)

Leibniz-kriteriet (Teorem 14, s. 548, Adams, 5. utg.)

OPPGAVE 6:

(a) Rekken divergerer. (i)

(Begrunnelse: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 / (1 + n^{3/2}) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n^{3/2} + 1} \right) \right) = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Altså har vi divergens i følge "divergens-kriteriet", (Teorem 4, s. 532, Adams, 5. utg.)

(b) Rekken konvergerer i $[-1, 1]$. (iii)

Vi har:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = |x|$$

Altså har vi absolutt konvergens for $|x| < 1$. For $x = 1$ har vi divergens

(sammenlign med den harmoniske rekke:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

som vi vet divergerer.)

For $x = -1$ har vi konvergens ut fra Leibniz-kriteriet (meritt ovenfor!)

(c) Rekken er Maclaurinrekken for e^x (ii)

(s. 567, Adams, 5. utg.)

(d) Rekkens sum er $2/(2-x)^2$ (ii)

For $|x| < 2$ har vi:

$$\frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \underset{\text{(geom. rekke)}}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots}$$

Derivasjon ledd for ledd gir:

$$\frac{2}{(2-x)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2^3} + \frac{4x^3}{2^4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^n$$

(Følge av Teorem 19, s. 559, Adams, 5. utg.)