OPPGAVE 1:

En del får algebraisk ligning:

$$r^2 + r = 0,$$

og dermed rötter $r = 0$, $r = -1$.
Mange er nokså klønet når det gjelder å löse den riktige ligning:

$$r^2 + 1 = 0.$$

Kanskje dette skyldes "respekten" for komplekse tall som er indoktrinert i skolematematikken? For å unngå feil her som f.eks. $r = \pm 2i$ bör man jo "sette pröve":

$$r^2 + 1 = (\pm 2i)^2 + 1 = -4 + 1 = -3 \neq 0$$

OM Å "SETTE PRØVE":

Generelt virker det som om man er svært bundet av formelen:

$$r = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\,\right]$$

– og ikke husker at röttene innsatt i ligningen $ar^2 + br + c = 0$ skal gi 0, d.v.s. hvis röttene er $r = r_1$ og $r = r_2$ så skal: $ar_1^2 + br_1 + c = 0$ og $ar_2^2 + br_2 + c = 0$

Når det gjelder den første feilen nevnt ovenfor, kan man også oppdagen feilen ved å sette inn

$$y_1 = e^{0x} = 1 \quad \text{og} \quad y_2 = e^{-x}$$

i differensialligningen $y'' + y = 0$
Her får vi: $y_1'' = 0$ og $y_1'' + y_1 = 0 + 1 \neq 0$
og $y_2' = -e^{-x}$, $y_2'' = e^{-x}$ og $y_2'' + y_2 = e^{-x} + e^{-x}$
$= 2e^{-x} \neq 0$. Så både $y = y_1$ og $y = y_2$ er feil!

MORALEN HER ER:

Sett prøve der du kan – og unngå unødvendige regnefeil!

OPPGAVE 2:

(a) Vanlig feil er at man skriver:

$$\int_2^T \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^T \frac{du}{u}$$

Skifter man variabel må også grensene i integralet justeres. (Dette regnes ikke som noen alvorlig feil.)

(b) Noen skriver:

$$\int_2^T \frac{dx}{x \ln x} = \sum_{n=2}^{T} \frac{1}{n \ln n}$$

Selv om idéen nok er riktig, blir jo dette misbruk av likhetstegnet.

OPPGAVE 3:

(a) Noen skriver:

$$P_6(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(6)}(x)}{6!}(x-c)^6$$

$$= \cos x + (-\sin x)(x-\pi) + \cdots - \frac{(\cos x)}{6!}(x-\pi)^6$$

Dette er jo nokså uheldig!! $P_6(x)$ skal jo bli et polynom av 6. grad i $(x-\pi)$, og det ovenstående inneholder bl.a. $\cos x$ og $\sin x$. Mener man at x skal bety π i koeffisientene og x (variabel) i faktorene $(x-\pi)^n$? I så fall står x for to forskjellige ting i samme uttrykk!!

OPPGAVE 4:

Her ser det ut til at hoved-problemet for mange er å få med at når $P_1 = (x_1, y_1)$ ligger på parabelen $y = x^2$, så blir koordinatene: (x_1, x_1^2). Analogt blir koordinatene $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, x_2^2)$

Det synes også som ~~om~~ følgende enkle faktum er oversett i skole-matematikken: Når $P_0 = (x_0, y_0)$ er midtpunktet på linjestykket mellom $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$, så er

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

(Se ellers løsningen!)

En del uttrykker seg dårlig språklig, eksempelvis har vi: "Hvis de to linjene på figuren skal være parallelle, så må..." - og så regner videre fra dette utgangspunkt. Noen regner i prinsippet videre med ekvivalensen ⟺, men dette framgår ikke av teksten. En del kommer da egentlig fram, mens noen etter noen linjer går i ring språklig og logisk - og har følgelig ikke bevist noe som helst.

Oppgave 5:

(a) Her bommer mange på definisjonen av absolutt konvergens av en rekke. Det korrekte er at man krever at $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergerer, men ikke i tillegg at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer. Dette er jo presisert i læreboken og på forelesning. Det er jo bevist for:
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer,}$$
vi skal fram til i denne oppgavens punkt (c). (Det ville jo være nokså meningsløst å be om et bevis for dette dersom det allerede inngikk som en del av definisjonen i (a)!)
Se Theorem 13, s. 496, Adams. Dette teorem ble også bevist på forelesning.

(b) Noen tror at det er nok å observere at $a_n \leq |a_n|$ og anta at $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergerer for å kunne slutte at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer v.h.a. sammenligningstesten: Theorem 9, s. 489, Adams. Dette er en alvorlig misforståelse. Vi må ha: $0 \leq a_n \leq K b_n$ og konvergens av $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for å slutte konvergens av $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Hvis man dropper $0 \leq a_n$, ville man f. eks. ha: $-1 \leq \frac{1}{n^2}$ og $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergerer. Men ingen vil vel mene at rekken $-1-1-1\ldots$ konvergerer!!

Vitsen med dette punktet

er nettopp å se på rekker med <u>ikke-negative</u> ledd - og så benytte sammenligningskriteriet:

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n| \quad \text{for}$$

alle n - og $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergerer siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er antatt å være absolutt konvergent.

(c) Vi har nå at både $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ og $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n)$ konvergerer. Hvis vi så merker oss at:

$$a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$$

og

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}|a_n| - \sum_{n=1}^{N}(|a_n| - a_n)$$

og dessuten har etablert at begge følgene av partialsummer på høyresiden har grenser når $N \to \infty$, så følger det at:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n| - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n)$$

også eksisterer. Altså konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>ANDRE FEIL SOM GÅR IGJEN:</u>

- Svært mange synes å tro at dersom en rekke ikke bare har positive ledd, så må den være alternerende. Hva med en rekke som f.eks.:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \quad ?$$

Å trekke inn Leibniz-kriteriet, Theorem 14, s. 497, i definisjonen av abs. konv. og/eller betingt konvergens blir bare tøv. Likeledes blir det töv å pröve å gi disse definisjon bare ved å nevne eksempler.

- En del regner litt fram og tilbake og komme til at $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ – og slutter deretter at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer!!! (Huff!) Hva med den divergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$??
- Implikasjonspiler $\Rightarrow$ brukes av en del som likhetstegn: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow s$ o.l. Implikasjonstegnet står mellom to <u>utsagn</u>, som f.eks.:
  "n er delbart med 4 $\Rightarrow$ n er delbart med 2."

Analogt brukes ekvivalenstegnet $\Leftrightarrow$ mellom to ekvivalente <u>utsagn</u>:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ eller } x = -2.$$

- Noen snakker om $\lim_{n\to\infty} a_n$ men mener antagelig $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$.
- Noen snakker om <u>konvergens-intervall</u> og konvergens/divergens i endepunktene. Men dette har bare relevans for potensrekker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ o.l. Og i denne oppgaven er det jo ikke snakk om dette!